1. ಘಟಕ(ಮಾಡ್ಯೂಲ್)ದ ವಿವರಣೆ ಮತ್ತು ರಚನಾ ವಿನ್ಯಾಸ

ಘಟಕದ ವಿವರಣೆ	
ವಿಷಯ	ಗಣಿತಾಶಾಸ್ತ್ರ
ಕೋರ್ಸ್ ಹೆಸರು	ಗಣಿತ 01 (ವರ್ಗ XI, ಸೆಮಿಸ್ಟರ್ - 1)
ಘಟಕದ ಹೆಸರು	ಸಂಬಂಧ ಮತ್ತು ಉತ್ಪನ್ನ - ಭಾಗ 2
ಘಟಕದ ಐ.ಡಿ	kemh_10202
ಪೂರ್ವ-ಅವಶ್ಯಕತೆಗಳು	ಗಣ ಮತ್ತು ಅದರ ಲಕ್ಷಣಗಳು,ಕಾರ್ಟೆಸಿಯನ್ ಗುಣಲಬ್ಧ
ಉದ್ದೇಶಗಳು	ಈ ಅಧ್ಯಾಯವನ್ನು ಕಲಿತ ನಂತರ , ಅಭ್ಯಸಿಸುವವರು, ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಕಲಿಯುವಂತವರಾಗುತ್ತಾರೆ. • ಸಂಬಂಧಗಳು. • ಸಂಬಂಧದ ಕ್ಷೇತ್ರ, ಸಹಕ್ಷೇತ್ರ ಮತ್ತು .ವ್ಯಾಪ್ತಿ
ಪ್ರಮುಖ ಪದಗಳು	ಕಾರ್ಟೆಸಿಯನ್ ಗುಣಲಬ್ಧ, ಸಂಬಂಧ, ಕ್ಷೇತ್ರ, ಸಹಕ್ಷೇತ್ರ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಪ್ತಿ.

2. ಸಂರಚನಾ ತಂಡ:

ಪದನಾಮ	**ಹೆಸರು**	**ಅಂಗಸಂಸ್ಥೆ**
ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ MOOC ಸಮನ್ವಯಾಧಿಕಾರಿ(NMC)	ಪ್ರೊ. ಅಮರೇಂದ್ರ. ಪಿ. ಬೆಹೇರಾ	CIET, NCERT, ನವದೆಹಲಿ
ಕಾರ್ಯಕ್ರಮ ಸಮನ್ವಯಾಧಿಕಾರಿ	ಡಾ. ಮಹಮ್ಮದ್ ಮಾಮೂರ್ ಅಲಿ	CIET, NCERT, ನವದೆಹಲಿ
ಕೋರ್ಸ್ ಸಮನ್ವಯಾಧಿಕಾರಿ(CC)/PI	ಡಾ. ತಿಲ್ ಪ್ರಸಾದ್ ಶರ್ಮ	DESM, NCERT ದೆಹಲಿ
ಕೋರ್ಸ್ ಉಪ ಸಮನ್ವಯಾಧಿಕಾರಿ(Co-PI)	ಡಾ. ಮಹಮ್ಮದ್ ಮಾಮೂರ್ ಅಲಿ	CIET, NCERT, ನವದೆಹಲಿ
ವಿಷಯ ಪರಿಣತರು (SME)	ಕುಮಾರಿ. ಅಂಜಲಿ ಚುಗಾನಿ	ಸಂಸ್ಕೃತ ಶಾಲೆ. ಹೊಸದೆಹಲಿ
ಪರಿಶೀಲನಾ ತಂಡ	ಡಾ. ಸಾಧನ ಶ್ರೀವತ್ಸವ	ಕೆ. ವಿ. ಎಸ್, ಫರಿದಾಬಾದ್, ಹರಿಯಾಣ

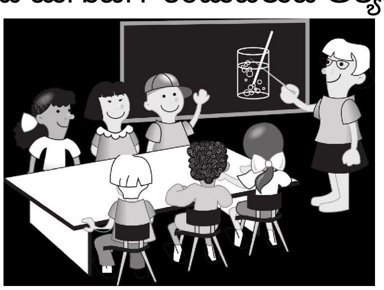
ಪರಿವಿಡಿ

1. **ಪೀಠಿಕೆ**

ನಮ್ಮ ಬಾಲ್ಯದಿಂದ ನಾವು ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ವಸ್ತುಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಪರ್ಕ ಅಥವಾ ಸಂಬಂಧವು ಒಂದು ಸಂಬಂಧವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಕಲಿತಿದ್ದೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಒಂದು ಮಗುವಿಗೆ ಅತ್ಯಂತ ಸಾಮಾನ್ಯ ವಾದ ಸಂಬಂಧವೆಂದರೆ ಅದು ತಂದೆ, ತಾಯಿ ಮತ್ತು ಮಗುವಿನ ಸಂಬಂಧವಾಗಿದೆ.

ಅಣ್ಣ-ತಂಗಿಯ ಸಂಬಂಧ.

ಮುಂದೆ ಮಗುವಿಗೆ ಕಂಡುಬರುವ ಅತ್ಯಂತ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಂಬಂಧವು ಶಿಕ್ಷಕ ಮತ್ತು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದೆ.



2. ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಸಂಬಂಧ ಎಂದರೇನು?

ಇಂದು ನಾವು ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಸಂಬಂಧ ಎಂದರೇನು ಎಂದು ಚರ್ಚಿಸಲಿದ್ದೇವೆ.

ಗಣಿತದಲ್ಲಿ, ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಸಂಕೇತಗಳು, ಚರಾಕ್ಷರಗಳು, ಗಣ ಗಳು, ಗಣ ಗಳ ಸಮೂಹ, ಇತ್ಯಾದಿಗಳನ್ನು ಸಂಬಂಧಿಸಲು "ಸಂಬಂಧ" ಎಂಬ ಪದದ ಮೂಲಕ ವಿವರಿಸಲು ಬಳಸುತ್ತೇವೆ.

ಈ ಮಾಡ್ಯೂಲ್ ನಲ್ಲಿ, ಎರಡು ಗಣ ಗಳಿಂದ ಜೋಡಿ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಸಂಬಂಧಿಸಿ ಹೇಗೆ ಜೋಡಿಸಬೇಕೆಂದು ಮತ್ತು ಎರಡು ಗಣ ಗಳ ಗಣಾಂಶಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಪರಿಚಯಿಸುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಕಲಿಯಲಿದ್ದೇವೆ. ಅಂತಿಮವಾಗಿ, ಈ ಕೆಳಗಿನ ಮಾಡ್ಯೂಲ್ ನಲ್ಲಿ ಕಾರ್ಯನಿರ್ವಹಿಸಲು ಬೇಕಾಗುವ ವಿಶೇಷ ಸಂಬಂಧಗಳ ಬಗ್ಗೆ ನಾವು ಕಲಿಯುತ್ತೇವೆ.

(i) ಸಂಬಂಧಗಳು:

ಎರಡು ಗಣ ಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ, A ಅನ್ನು ಹುಡುಗರ ಗಣವೆಂದು ಮತ್ತು ಗಣ B ಹುಡುಗಿಯರ ಗಣವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ.

A= {ಶ್ಯಾಮ್, ರಾಮ್, ಮೋನು, ಸೋನು}

B = {ದೇವಾಂಗಿ, ಅಸ್ಥಾ, ಪಲ್ಲವಿ, ಅದಿತ್ರಿ}

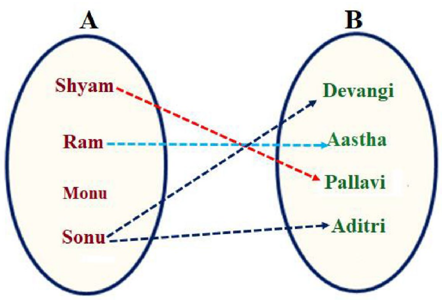
ನಾವು ಈ ಹಿಂದಿನ ಮಾಡ್ಯೂಲ್ ನಲ್ಲಿ ಕಲಿತಂತೆ, ಕಾರ್ಟೀಸಿಯನ್ ಗೂಣಲಬ್ಧ A×B ಪಡೆಯಲು ಈ ಎರಡು ಗಣ ಗಳಿಂದ ಎಲ್ಲಾ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ನಾವು ಬರೆದರೆ, ಆಗ

n(A) × n(B) = 4×4 =16 ಕ್ರಮಯುಗ್ಮಗಳಾಗುತ್ತವೆ.

ಇದನ್ನು "ಒಬ್ಬ ಸಹೋದರ" ಎನ್ನುವ ಸಂಬಂಧದೊಂದಿಗೆ ಗಣ A ದಲ್ಲಿರುವ ಹುಡುಗರನ್ನು B ಗುಂಪಿನ ಹುಡುಗಿಯರೊಂದಿಗೆ ಸಂಬಂಧ ಹೊಂದಿರುವರು ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ, ಆಗ

ಶ್ಯಾಮ್ ಪಲ್ಲವಿಯ ಸಹೋದರ, ರಾಮ್ ಅಸ್ಥಾ ನ ಸಹೋದರ, ಮೋನು ಗೆ ಈ ಗಣದಲ್ಲಿ ನಲ್ಲಿ ತಂಗಿಯು ಇಲ್ಲ, ಸೋನುಗೆ ಇಬ್ಬರು ತಂಗಿಯಂದಿರು ದೇವಾಂಗಿ ಮತ್ತು ಆದಿತ್ರಿ ಇದ್ದಾರೆ ಅಂದುಕೊಂಡರೆ.

ಈ ಸಂಬಂಧದ ಒಂದು ದೃಶ್ಯ ನಿರೂಪಣೆಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.



ಇಲ್ಲಿ ನಾವು ಗಮನಿಸಬೇಕಾದ್ದೇನೆಂದರೆ "ಒಬ್ಬ ಸಹೋದರ" ಎಂಬ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಗಣ A ದಿಂದ B ಗಣಕ್ಕೆ ಅನ್ವಯಿಸಿದಾಗ ಈ ಸಂಬಂಧದಲ್ಲಿ ಕೇವಲ ನಾಲ್ಕು ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಹೊಂದಬಹುದು.

ಇದನ್ನು ಗಣಾಂಶ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಗಣ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು:

R= {(ಶ್ಯಾಮ್, ಪಲ್ಲವಿ), (ರಾಮ್, ಆಸ್ತ),

(ಸೋನು, ದೇವಾಂಗಿ), (ಸೋನು, ಆದಿತ್ರಿ)}

ಮತ್ತು ನಿಯಮ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ

R ={(x,y) : x∈A, y∈B, ಇಲ್ಲಿ y ಯು x ನ ಒಬ್ಬ ಸಹೋದರ} ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಹೀಗೆ, "A" ಗಣದಿಂದ B ಗಣಕ್ಕೆ "ಒಬ್ಬ ಸಹೋದರ" ಎಂಬ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿದಾಗ ಕಾರ್ಟೀಸಿಯನ್ ಗುಣಲಬ್ಧ A×B ಗೆ 'R' ಗಣವು ಒಂದು ಉಪಗಣ ವಾಗಲು ಕಾರಣವಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ "ಒಬ್ಬ ಸಹೋದರ" ಎಂಬ ಸಂಬಂಧದಿಂದ $x \in A$, $y \in B$ ಆಗಿ x ಯು y ಗೆ ಸಂಬಂಧವಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಆಗಬೇಕಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ $(x, y) \in R$ ಆಗುವುದು.

ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ನಾವು ಈಗಾಗಲೇ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣಗಳಲ್ಲಿ ಅಂತಹ ಅನೇಕ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಕಲಿತಿದ್ದೇವೆ, ಉದಾಹರಣೆಗೆ;

"ಇದಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದು(is less than)", "ಇದಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ(is greater than)", "ಇದಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ"(is equal to), "ಇದರ ಚೌಕವಾಗಿದೆ"(is square of), ಇತ್ಯಾದಿ.

ಇನ್ನೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ನೋಡೋಣ:

N ನಿಂದ N ಗೆ ಒಂದು ಸಂಬಂಧವನ್ನು "ಅದರ ಘನವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ" ಎಂದು ನಾವು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದರೆ, ಆಗ ಗಣವನ್ನು ಗಣಾಂಶ ಪದ್ದತಿಯಲ್ಲಿ ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು:

R= {(1,1),(2,8), (3,27), (4,64),…….} ಮತ್ತು ಇದನ್ನು ನಿಯಮ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ

R= $\{(x,y): x, y \in N$ ಮತ್ತು $y=x^3\}$ ಎಂದು ಬರೆಯುಬಹುದು.

N ನಿಂದ N ಗೆ ಮೇಲಿನ ಸಂಬಂಧ “ಅದರ ಘನವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ” ಎಂಬುದು N×N ಗೆ R ಎಂಬುದು ಉಪಗಣವಾಗಲು ಕಾರಣವಾಗುತ್ತದೆ ಅಂದರೆ $y=x^3$ ಆದಾಗ ಮತ್ತು ಆಗಬೇಕಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ $(x,y)\in R$ *ಆಗುವುದು.*

ಈ ಗಣಗಳ ಸಂಬಂದಿತ ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

1R1, 2R8, 3R27, 4R64 ,……..ಇಲ್ಲಿ R ಎಂಬುದು “ಅದರ ಘನವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ” ಎಂಬ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.

ಇನ್ನೆರಡು ಗಣಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ

P = {a, b, c} and Q = {ಅಲಿ, ಭಾನು, ಬಿನಯ್, ಚಂದ್ರ, ದಿವ್ಯಾ} ಆಗಿರಲಿ.

P ಮತ್ತು Q ನ ಕಾರ್ಟೀಸಿಯನ್ ಗುಣಲಬ್ಧವು 3×5 (= 15) ಕ್ರಮಯುಗ್ಮಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

ಯಾಕೆಂದರೆ $n(P\times Q) = n(P)\times n(Q) = 15$, ಇವುಗಳನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡುಬಹುದು

P × Q = {(a, ಅಲಿ), (a, ಭಾನು), (a, ಬಿನಯ್), ..., (c, ದಿವ್ಯಾ)}.

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕ್ರಮಯುಗ್ಮ $(x, y)\in P \times Q$ ಗೆ ಮೊದಲ ಅಂಶ $x\in P$ ಮತ್ತು ಎರಡನೆ ಅಂಶ $y\in Q$ ಅನ್ವಯಿಸ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧ R ನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಿದಾಗ ನಮಗೆ

P × Q ನ ಒಂದು ಉಪಗಣ ದೊರೆಯುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ "x ಎಂಬುದು y ಹೆಸರಿನ ಮೊದಲ ಅಕ್ಷರವಾಗಿದೆ", ಎಂಬ ಸಂಬಧವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ ಆಗ

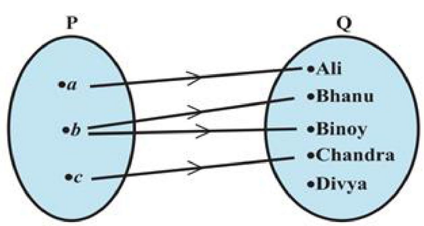
R = {(a, ಅಲಿ), (b, ಭಾನು), (b, ಬಿನಯ್), (c, ಚಂದ್ರ)} ಉಪಗಣ ದೊರೆಯುವುದು.

ಇದನ್ನು ನಿಯಮ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಹೀಗೆ

R= {(x,y): "x ಎಂಬುದು y ಹೆಸರಿನ ಮೊದಲ ಅಕ್ಷರವಾಗಿದೆ,

$x\in P, y\in Q$}.

ಈ ಸಂಬಂಧದ ಒಂದು ದೃಶ್ಯ ನಿರೂಪಣೆಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.



ಗಮನಿಸಿ ದಿವ್ಯಾ ಗಣ P ಯ ಯಾವುದೇ ಅಂಶದೊಂದಿಗೆ ಸಂಬಂಧಹೊಂದಿಲ್ಲ, ಏಕೆಂದರೆ 'ದಿವ್ಯ' ಹೆಸರಿನ ಮೊದಲ ಅಕ್ಷರ d ಯು P ಗಣ ಕ್ಕೆ ಸೇರಿಲ್ಲ.

ಈ ಎಲ್ಲಾ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ, ನಾವು ಈಗ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಹೀಗೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಬಹುದು:

(ii) ವ್ಯಾಖ್ಯಾನ:

ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಗಣ A ಯಿಂದ ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಗಣ B ಗೆ ಇರುವ R ಎನ್ನುವ ಸಂಬಂಧವು ಕಾರ್ಟಿಸಿಯನ್ ಗುಣಲಬ್ಧ A×B ನ ಉಪಗಣವಾಗಿದೆ.

ಈ ಉಪಗಣವು A×B ಯಲ್ಲಿನ ಕ್ರಮಯುಗ್ಮಗಳ ಮೊದಲ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ಅಂಶಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಲ್ಪಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ಉತ್ಪತ್ತಿಯಾಗುತ್ತದೆ.

ಎರಡನೆಯ ಅಂಶವನ್ನು ಮೊದಲ ಅಂಶದ ಬಿಂಬ(image) ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಕ್ರಮಯುಗ್ಮ ಗಳ ಮೊದಲ ಅಂಶವನ್ನು ಎರಡನೇ ಅಂಶದ ಪೂರ್ವ-ಬಿಂಬ(pre image) ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.
ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ, ಸಂಬಂಧ R: P →Q ಗೆ "ಅಲಿ" ಎಂಬುದು a ಅಂಶದ ಬಿಂಬವಾಗಿದೆ. ಮತ್ತು P ದಿಂದ Q ಗೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಡುವ ಅದೇ R ಸಂಬಂಧಕ್ಕೆ "a ಯು "ಆಲಿ" ಗೆ ಪೂರ್ವ ಬಿಂಬವಾಗಿದೆ.
R: P → Q ಸಂಬಂಧಕ್ಕೆ "ಭಾನು ಮತ್ತು ಬಿನಯ್" ಎಂಬ ಅಂಶವು "b" ಅಂಶದ ಎರಡು ಬಿಂಬಗಳಾಗುತ್ತವೆ ಮತ್ತು "ಚಂದ್ರ" ಎಂಬುದು "c" ಅಂಶದ ಬಿಂಬವಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು "b" ಮತ್ತು "c" ಗಳು ಅವುಗಳ ಪೂರ್ವ ಬಿಂಬಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.
ಒಂದುವೇಳೆ (a,b) ∈ R, ಆದರೆ ನಾವು "a ಯು b ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದೆ" ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು aRb ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು "a ಎಂಬುದು R ನ ಸಂಬಂಧದಲ್ಲಿ b ಯ ಜೊತೆಗಿದೆ" ಎಂದು ಓದುತ್ತೇವೆ.
(a,b) ∉ R ಆದರೆ ಆಗ "a ಎಂಬುದು R ನ ಸಂಬಂಧದಲ್ಲಿ b ಯ ಜೊತೆಗಿಲ್ಲ" ಎಂದು ಓದುತ್ತೇವೆ.

3. ಕ್ಷೇತ್ರ:
ಗಣ A ನಿಂದ ಒಂದು ಗಣ B ಗೆ ಬಂದ ಸಂಬಂಧ R ನಲ್ಲಿ ಕ್ರಮಯುಗ್ಮಗಳ ಎಲ್ಲಾ ಮೊದಲ ಅಂಶಗಳ ಗಣವನ್ನು ಕ್ಷೇತ್ರ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.
ಮೇಲಿನ ಚರ್ಚೆಯಲ್ಲಿ, ಪರಿಗಣಿಸಲಾದ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಕ್ಷೇತ್ರವು ಈ ಕೆಳಕಂಡಂತಿದೆ:
(i) ಕ್ಷೇತ್ರ = {ಶ್ಯಾಮ್, ರಾಮ್, ಮೋನು, ಸೋನು}
(ii)ಕ್ಷೇತ್ರ ={1,2,3,4……..}
(iii) ಕ್ಷೇತ್ರ= {a, b, c}
ಹಾಗಾಗಿ ಕ್ಷೇತ್ರವನ್ನು R = {a: (a,b) ∈ R} ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

4. ವ್ಯಾಪ್ತಿ ಮತ್ತು ಸಹ-ಕ್ಷೇತ್ರ:
ಗಣ A ನಿಂದ ಒಂದು ಗಣ B ಗೆ ಬಂದ ಸಂಬಂಧ R ನಲ್ಲಿ ಕ್ರಮಯುಗ್ಮಗಳ ಎಲ್ಲಾ ಎರಡನೆ ಅಂಶಗಳ ಗಣವನ್ನು ವ್ಯಾಪ್ತಿ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.
ಸಂಪೂರ್ಣ ಗಣ B ಅನ್ನು ಸಂಬಂಧ R ನ ಸಹಕ್ಷೇತ್ರ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.
ಇಲ್ಲಿ ಗಮನಿಸಬೇಕಾದ ಅಂಶವೆಂದರೆ ವ್ಯಾಪ್ತಿ ⊆ ಸಹಕ್ಷೇತ್ರ.
ಮೇಲಿನ ಚರ್ಚೆಯಲ್ಲಿ, ವಿವಿಧ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು:
(i) ವ್ಯಾಪ್ತಿ= {ದೇವಾಂಗಿ, ಆಸ್ತ, ಪಲ್ಲವಿ, ಆದಿತ್ರಿ}
(ii) ವ್ಯಾಪ್ತಿ={1,8,27,64, ...}
(iii)ವ್ಯಾಪ್ತಿ={ಅಲಿ, ಭಾನು, ಬಿನಯ್, ಚಂದ್ರ}
ಹೀಗೆ, ವ್ಯಾಪ್ತಿಯನ್ನು R = {b: (a,b) = R} ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.
ಟಿಪ್ಪಣಿಗಳು:
(i) ಗಣಾಂಶ ಪದ್ಧತಿ ಅಥವಾ ನಿಯಮ ಪದ್ಧತಿ ಯಿಂದ ಒಂದು ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದು.
(ii) ಬಾಣದ ರೇಖಾಚಿತ್ರವು ಸಂಬಂಧದ ಒಂದು ದೃಶ್ಯ ನಿರೂಪಣೆಯಾಗಿದೆ.
(iii) ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ, A×A ನ ಯಾವುದೇ ಉಪಗಣವು A ಮೇಲಿನ ಸಂಬಂಧವಾಗಿದೆ .

ಈ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಗಳನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು ನಾವೀಗ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.
(a,b) ∈ R ಆಗಿ "a ಎಂಬುದು b ನ ಗುಣಕವಾಗಿದೆ" ಎಂದು R ಸಂಬಂಧವನ್ನು N ಮೇಲೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲ್ಪಟ್ಟರೆ ಆಗ R ⊆N×N, ನಿಯಮಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು
R= {(a,b):a∈ N,b∈ N, a ಎಂಬುದು bನ ಗುಣಕವಾಗಿದೆ}

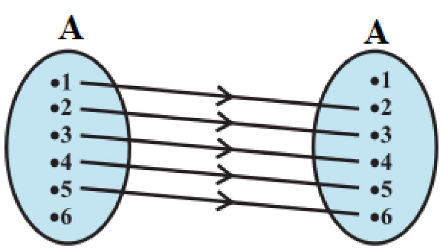
ಈಗ R ಗಣವು (1,1),(2,1),(3,1),……, ಕ್ರಮಯುಗ್ಮಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುತ್ತದೆ ಯಾಕೆಂದರೆ 1, 2, 3 ಗಳು 1 ರ ಗುಣಕಗಳಾಗಿವೆ.

ಹಾಗೆಯೇ R ಗಣವು (4,2),(6,2), (8, 2), ……,…. ಕ್ರಮಯುಗ್ಮಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುತ್ತದೆ. ಯಾಕೆಂದರೆ 4, 6, 8, ಗಳು 2 ರ ಗುಣಕಗಳಾಗಿವೆ. ಹೀಗೆ N×N ನಲ್ಲಿ ಈ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಅಸಂಖ್ಯಾತ ಕ್ರಮಯುಗ್ಮಗಳು ತೃಪ್ತಿಪಡಿಸುತ್ತವೆ.

ಆದರೆ ಇಲ್ಲಿ ಗಮನಿಸಬೇಕಾದದ್ದರೆಂದರೆ
(1,2),(1, 3),(2,3),(2, 4),(2, 5),(2, 6),(2, 8),…. ಇತ್ಯಾದಿ ಕ್ರಮಯುಗ್ಮಗಳು ಸಂಬಂಧ R ಗಣದಲ್ಲಿ ಒಳಗೊಂಡಿರುವುದಿಲ್ಲ ಯಾಕೆಂದರೆ ಈ ಕ್ರಮಯುಗ್ಮಗಳ ಮೊದಲ ಅಂಶಗಳು ಎರಡನೆ ಅಂಶಗಳ ಗುಣಕಗಳಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆ 1:
A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, A ದಿಂದ A ಗೆ ಸಂಬಂಧ R ನ್ನು $R = \{(x, y): y = x + 1\}$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗಿದೆ.
(i) ಬಾಣದ ರೇಖಾಚಿತ್ರ ಸಹಾಯದಿಂದ ಈ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಚಿತ್ರಿಸಿ.

(ii) Rನ ಕ್ಷೇತ್ರ, ಸಹಕ್ಷೇತ್ರ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಪ್ತಿಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.
ಪರಿಹಾರ:
A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಿದೆ
A ದಿಂದ A ಗೆ ಸಂಬಂಧ R ನ್ನು
$R = \{(x, y): y = x + 1\}$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗಿದೆ.
ಸಂಬಂಧದ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನವನ್ನು ಬಳಸಿ R = {(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6)} ಎಂದು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.
ಈ ಸಂಬಂಧದ ದೃಶ್ಯ ನಿರೂಪಣೆಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಬಾಣದ ರೇಖಾಚಿತ್ರದಿಂದ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.

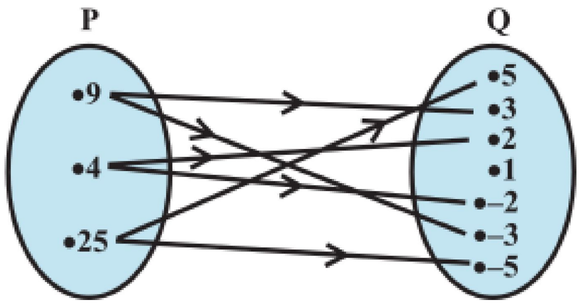


(ii) ಸಂಬಂಧ R ನಲ್ಲಿ ಕ್ರಮಯುಗ್ಮಗಳ ಎಲ್ಲಾ ಮೊದಲ ಅಂಶಗಳ ಗಣವನ್ನು ಸಂಬಂಧ R ನ ಕ್ಷೇತ್ರ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ, ಆದ್ದರಿಂದ
R ನ ಕ್ಷೇತ್ರ ={1, 2, 3, 4, 5,}
A ದಿಂದ A ಗೆ R ಸಂಬಂಧವನ್ನಯ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗಿದೆ ಇಲ್ಲಿ ಸಂಪೂರ್ಣ ಎರಡನೆ ಗಣ A ಯನ್ನು ಸಹಕ್ಷೇತ್ರ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ,
R ನ ಸಹಕ್ಷೇತ್ರ = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
ಸಂಬಂಧ R ನಲ್ಲಿ ಕ್ರಮಯುಗ್ಮಗಳ ಎಲ್ಲಾ ಎರಡನೆ ಅಂಶಗಳ ಗಣವನ್ನು ಸಂಬಂಧ R ನ ವ್ಯಾಪ್ತಿ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ, ಆದ್ದರಿಂದ R ನ

ವ್ಯಾಪ್ತಿ = {2, 3, 4, 5, 6}
ಸಂಬಂಧಗಳ ವ್ಯಾಪ್ತಿ ಮತ್ತು ಸಹಕ್ಷೇತ್ರವನ್ನು ನಾವು ಹೋಲಿಸಿದಾಗ ನಾವು ವ್ಯಾಪ್ತಿ ಮತ್ತು ಸಹಕ್ಷೇತ್ರದ ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 2:
R ಎಂಬ ಒಂದು ಸಂಬಂಧವು N ನ ಮೇಲೆ
" a–b ಯು n ∈ N ನ ಗುಣಕವಾಗಿದ್ದರೆ" ಮಾತ್ರ aRb ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರಲಿ. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವ ಕ್ರಮಯುಗ್ಮಗಳು R ನಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ .
(6, 2), (5,3), (2,6), (3,5), (8,5), (8, 7), (7, 8),
(7, 7)
Solution:
ನಿಯಮಪದ್ದತಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ R ನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ,
R = {(a,b): a, b∈ N, a–b ಯು n ∈ N ಗೆ ಗುಣಕವಾಗಿದೆ}
ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಕ್ರಮಯುಗ್ಮಗಳನ್ನು ಒಂದೊಂದಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ, (6, 2) ಜೋಡಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ ನಮಗೆ ,
6 – 2 = 4 ದೊರೆಯುತ್ತದೆ . ಇದು N ನಲ್ಲಿರುವ ಕನಿಷ್ಟ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಗುಣಕವಾಗಿರತ್ತದೆ.
ಆದ್ದರಿಂದ (6, 2) ∈R,
ಇದೇ ರೀತಿ , (5,3)∈R, (8, 5)∈R, (8, 7)∈R ಆಗಿರುತ್ತದೆ.
ಈಗ (2,6) ಜೋಡಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ , 2– 6 = –4 ಆಗುತ್ತದೆ.
–4 ಸಂಖ್ಯೆಯು 1, 2 , 4 ರ ಗುಣಕವಾಗಿದ್ದರೂ ಕೂಡ,
–4 ∉N ಆಗಿರುತ್ತದೆ , ಆದುದರಿಂದ ಇದು ಬೇಕಾಗಿರುವ ನಿಬಂಧನೆಯನ್ನು ತೃಪ್ತಿ ಪಡಿಸುವುದಿಲ್ಲ , ಹಾಗಾಗಿ
(2, 6)∉R, (3, 5)∉R, (7, 8)∉R.
ಈಗ (7,7) ಜೋಡಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ,7– 7 = 0, 0 ∉N, ಇದೂ ಕೂಡ ನಿಬಂಧನೆಯನ್ನು ತೃಪ್ತಿ ಪಡಿಸುವುದಿಲ್ಲ , ಆದ್ದರಿಂದ (7, 7)∉R.
ಹೀಗಾಗಿ , ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಕ್ರಮಯುಗ್ಮಗಳಲ್ಲಿ (6, 2), (5,3), (8, 5), (8, 7) ಗಳು R ನಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ ಮತ್ತು (2,6), (3,5), (7, 8), (7, 7) ಗಳು R ನಲ್ಲಿರುವುದಿಲ್ಲ.
ಆದುದರಿಂದ (6, 2) ∈R,
ಇದೇ ರೀತಿ , (5,3)∈R, (8, 5)∈R, (8, 7)∈R

ಉದಾಹರಣೆ 3:
ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರವು P ಮತ್ತು Q ಸೆಟ್ ಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಸಂಬಂಧವನ್ನು (i) ನಿಯಮ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ (ii) ಗಣಾಂಶ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.
ಅದರ ಕ್ಷೇತ್ರ , ಸಹಕ್ಷೇತ್ರ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಪ್ತಿ ಏನಾಗಿರುತ್ತದೆ ?
ಪರಿಹಾರ:
ಚಿತ್ರವನ್ನು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿದಾಗ , R ಎಂಬುದು ಗಣ P ಯಿಂದ ಗಣ Q ಗೆ ಒಂದು ಸಂಬಂಧವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುತ್ತದೆ, ಇದು ಸೆಟ್ P ಗೆ ಸೇರಿದ ಗಣಾಂಶವು ಸೆಟ್ Q ಗೆ ಸೇರಿದ ಗಣಾಂಶದ ವರ್ಗವಾಗಿದೆ.



ನಿಯಮ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ,
$R = \{(x,y): x \in P, y \in Q, x$ ಯು y *ನ ವರ್ಗವಾಗಿದೆ"*}.
ಗಣಾಂಶ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ,
$R = \{(9, 3), (9, –3), (4, 2), (4, –2), (25, 5), (25, –5)\}$
ಈ ಸಂಬಂಧದ ಕ್ಷೇತ್ರವು ,
ಕ್ಷೇತ್ರ $= \{4, 9, 25\}$ ಎಂದಾಗಿದೆ.
ಈ ಸಂಬಂಧದ ವ್ಯಾಪ್ತಿ,
ವ್ಯಾಪ್ತಿ $=\{– 2, 2, –3, 3, –5, 5\}$ ಆಗಿದೆ
ಮತ್ತು ಸಹಕ್ಷೇತ್ರವು ,
ಸಹಕ್ಷೇತ್ರ$=\{1, – 2, 2, –3, 3, –5, 5\}= Q$
ನಾವು ಇಲ್ಲಿ ಗಮನಿಸಬೇಕಾದ್ದು 1 ಗಣಾಂಶವು P ಗಣದ ಯಾವುದೇ ಗಣಾಂಶಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿಲ್ಲ.
ಆದ್ದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಬಂಧದ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು ಸಹ-ಕ್ಷೇತ್ರ Q ನ ಉಪಗಣ ಆಗಿದೆ.

5. ಸಂಬಂಧಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ:

P ಮತ್ತು Q ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ m ಮತ್ತು n ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಪರಿಮಿತ ಗಣ ಗಳಾಗಲಿ.
ನಂತರ, $P\times Q$ ನಲ್ಲಿ ಕ್ರಮಯುಗ್ಮಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ,
$n(P\times Q) = n(P)\times n(Q) = mn$ *ಆಗುವುದು.*
ನಾವು ಯಾವುದೇ ಸಂಬಂಧ $R: P\rightarrow Q$, ವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದರೆ,
ಆಗ $R\subseteq P\times Q$ ಆಗುತ್ತದೆ
ಆದ್ದರಿಂದ, ಒಂದು ಗಣ A ನಿಂದ ಒಂದು ಗಣ B ಗೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಬಹುದಾದ ಎಲಾ ಸಂಬಂಧಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ $A\times B$ ನಿಂದ ಬಂದ ಸಾಧ್ಯತೆಯಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಉಪಗಣ ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ .
$n(A) = p$ ಮತ್ತು $n(B) = q$ ಆದರೆ , ಆಗ
$n(A \times B) = pq$ ಆಗುವುದು.
ಆದ್ದರಿಂದ $A\times B$ ನ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಭವನೀಯ ಉಪಗಣಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ $= 2^{pq}$, ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ಗಣ A ಯಿಂದ ಒಂದು ಗಣ B ಗೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಬಹುದಾದ ಒಟ್ಟು ಸಂಬಂಧಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ 2^{pq} ಆಗಿದೆ. ಈ 2^{pq} ಸಂಬಂಧಗಳ ಪೈಕಿ ಶೂನ್ಯ ಸಂಬಂಧ ಮತ್ತು ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಸಂಬಂಧವು(Universal relation) ಸಹ ಒಳಗೊಂಡಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 4:

$A = \{1, 2\}$ ಮತ್ತು $B = \{3, 4\}$. A ಯಿಂದ B ವರೆಗಿನ ಸಂಬಂಧಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ:

ಇಲ್ಲಿ $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$.
ಆದುದರಿಂದ $n(A\times B) = 4$,
$A\times B$ ಯ ಉಪಗಣಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $=2^4$.
ಆದ್ದರಿಂದ, A ಯಿಂದ B ಗೆ ಸಂಬಂಧಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 2^4.

ಸೂಚನೆ:

I. ಒಂದುವೇಳೆ, $R=\phi$ ಆದರೆ , ಆಗ R ಅನ್ನು ಶೂನ್ಯ ಸಂಬಂಧ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ .
II. $R = A\times B$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ R ಅನ್ನು ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಸಂಬಂಧ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.
III. A ಯಿಂದ A ಗೆ ಬಂದ ಸಂಬಂಧ R ಅನ್ನು Aಮೇಲಿನ ಒಂದು ಸಂಬಂಧವೆಂದು ಸಹ ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ.

6. ಸಾರಾಂಶ:

1) ಒಂದು ಗಣ A ಯಿಂದ ಒಂದು ಗಣ B ಗೆ ಬಂದ R ಎನ್ನುವ ಒಂದು ಸಂಬಂಧ, $A \times B$ ನಲ್ಲಿಯ ಕ್ರಮಯುಗ್ಮಗಳ ಮೊದಲ ಗಣಾಂಶ x ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ಗಣಾಂಶ y ನಡುವೆ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಹೊಂದುವುದರ ಮೂಲಕ ಪಡೆಯಲಾದ ಕಾರ್ಟೇಸಿಯನ್ ಗುಣಲಬ್ಧ $A \times B$ ನ ಒಂದು ಉಪಗಣವಾಗಿರುತ್ತದೆ.
2) ಒಂದು ಸಂಬಂಧ R ನ ಅಡಿಯಲ್ಲಿ x ನ ಬಿಂಬವು y ಆಗಿದೆ, ಅಲ್ಲಿ $(x, y)\in R$ ಮತ್ತು x ಅನ್ನು y ನ ಪೂರ್ವ-ಬಿಂಬ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.
3) R ಸಂಬಂಧದಲ್ಲಿ ಕ್ಷೇತ್ರವು ಸಂಬಂಧ R ನಲ್ಲಿ ಕ್ರಮಯುಗ್ಮ ಗಳ ಎಲ್ಲಾ ಮೊದಲ ಅಂಶಗಳ ಗಣ ಆಗಿದೆ.
4) R ಸಂಬಂಧದಲ್ಲಿ ಸಂಬಂಧ R ನ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು ಕ್ರಮಯುಗ್ಮಗಳ ಎಲ್ಲಾ ಎರಡನೇ ಅಂಶಗಳ ಗಣ ಆಗಿದೆ.
5) ಒಂದು ವೇಳೆ R ಅನ್ನು ಒಂದು ಗಣ A ಯಿಂದ ಒಂದು ಗಣ B ಗೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದರೆ, B ಗಣವು R ನ ಸಹಕ್ಷೇತ್ರ ಆಗಿದೆ.