1. మాడ్యూల్ మరియు దాని నిర్మాణం యొక్క వివరాలు

మాడ్యూల్ వివరాలు	
విషయం పేరు	గణితం
కోర్సు పేరు	గణితం 01 (11వ తరగతి, సెమిస్టర్ - 1)
మాడ్యూల్ పేరు / శీర్షిక	సంబంధం మరియు ప్రమేయాలు - పార్ట్ 1
మాడ్యూల్ ID	kemh_10201
పూర్వ భావనలు	సమితులు మరియు వాటి లక్షణాలు.
లక్ష్యాలు	ఈ పాఠం చదివిన/నేర్చుకున్న తరువాత, అభ్యాసకులు ఈ క్రిందివి చేయగలుగుతారు: • క్రమయుగ్మాలు • కార్టేసియన్ ఉత్పత్తులు లేదా లబ్ధాలు(Cartisian Products)
కీలకపదాలు	కార్టేసియన్ ఉత్పత్తులు (Cartisian Products)

2. అభివృద్ధి బృందం

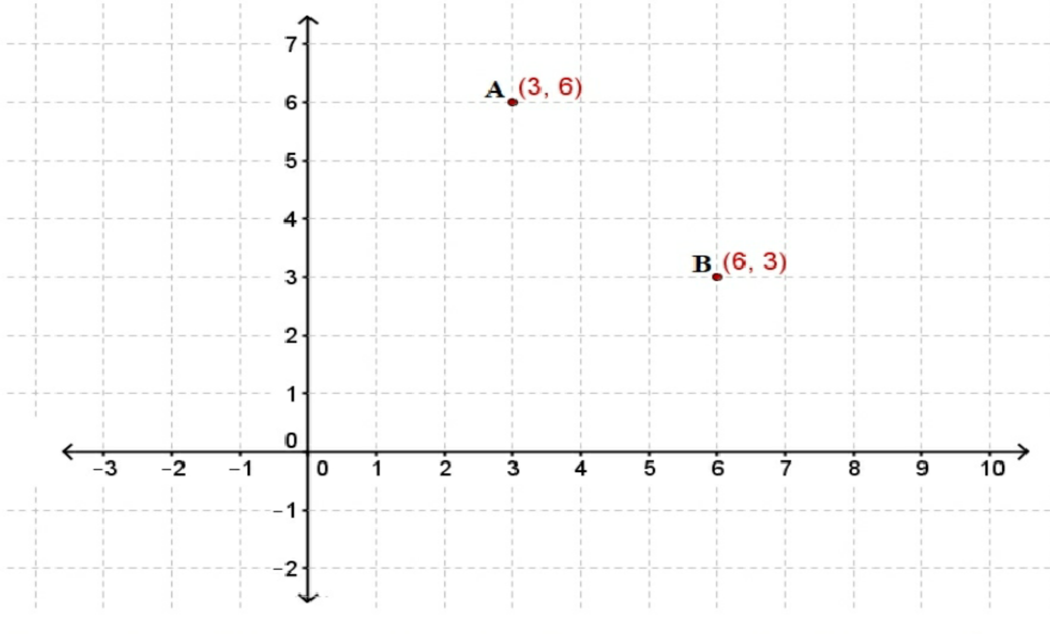
పాత్ర	పేరు	అనుబంధం
జాతీయ MOOC కోఆర్డినేటర్ (NMC)	ప్రొఫెసర్ అమరేంద్ర పి. బెహెరా	CIET, NCERT, New Delhi
ప్రోగ్రాం కోఆర్డినేటర్	డాక్టర్. ఇందుకుమార్	CIET, NCERT, New Delhi
కోర్సు సమన్వయకర్త (CC) / PI	డాక్టర్. తిల్ ప్రసాద్ శర్మ	DESM, NCERT, New Delhi
కోర్సు కో-ఆర్డినేటర్ / Co PI	అంజలి ఖురానా	CIET, NCERT, New Delhi
విషయ నిపుణులు (ఎస్ఎంఇ)	డాక్టర్.మానిక శర్మ	Shiv Nadar University, Noida

సవరణ	డాక్టర్. సాధనా శ్రీవాస్తవ (Retd)	కేవిఎస్,ఫరీదాబాద్,హర్యానా
సమీక్ష బృందం	ఆచార్య. భీం ప్రకాష్ సర్రాః	Assam University, Tezpur
	ఆచార్య. రామ్ అవతార్ (Retd)	DESM, NCERT, New Delhi
	ఆచార్య. మహేంద్ర శంకర్ (Retd)	DESM, NCERT, New Delhi

విషయ సూచిక

1. పరిచయం

కార్టెసియన్ తలములో బిందువులను గుర్తించడాన్ని మనము మునుపటి తరగతులలో నేర్చుకున్నాము. కింది గ్రాఫ్ లో రెండు బిందువులు (3, 6) మరియు (6, 3) అను నిరూపకాలతో రూపొందించబడ్డాయి. గ్రాఫ్‌లో క్రింద వివరించిన విధంగా ఇవి A మరియు B అనే రెండు వేర్వేరు బిందువుల నిరూపకాలని మీకు బాగా తెలుసు.



ఇక్కడ ఈ రెండు జతల లో సంఖ్యల క్రమం చాలా ముఖ్యం అని ఇది చూపిస్తుంది. సంఖ్యలు ఒకే విధంగా ఉన్నప్పటికీ, వాటి క్రమాన్ని మార్చడం ద్వారా మనము కార్టేసియన్ తలములో రెండు వేర్వేరు బిందువులను పొందుతాము. అందువల్ల సంఖ్యలను వాటి జతలలో వ్రాయబడిన క్రమం ఇక్కడ ముఖ్యమైనది. ఇటువంటి జతలను క్రమయుగ్మాలు అని పిలుస్తారు.

2. క్రమయుగ్మాలు

ఒక నిర్దిష్ట క్రమములో గల ఒక జత సంఖ్యలను క్రమయుగ్మము అంటారు.

(a,b) మరియు (u,v)లు మూలకాలుగా గల రెండు క్రమయుగ్మాలు సమానం కావాలంటే $a = u$ మరియు $b=v$ అయినప్పుడు మాత్రమే అది సాధ్యమవుతుంది. కామనా (p, q) అనే క్రమయుగ్మము (q, p) అనే క్రమయుగ్మమునకు, $p = q$ అయితే తప్ప, ఎల్లప్పుడూ భిన్నంగా ఉంటుంది. కాబట్టి క్రమయుగ్మము అనేది ఒక నిర్దిష్ట క్రమంలో వ్రాయబడిన ఒక మూలకాల జత.

క్రమయుగ్మము (4, 5) అంటే గ్రాఫ్ పరంగా మొదటి నిరూపకం(abscissa) $x = 4$ మరియు రెండవ నిరూపకం (ordinate) $y = 5$ అని అర్థం. అలాగే క్రమయుగ్మము (5,4) అంటే మొదటి నిరూపకం(abscissa) $x = 5$ మరియు రెండవ నిరూపకం (ordinate) $y = 4$ అని అర్థం. అందువలన అవి రెండు వేర్వేరు బిందువులను సూచిస్తాయి.

A మరియు B రెండు సమితులుగా ఉంటే, అప్పుడు $a \in A$ మరియు $b \in B$ మూలకాలుగా గల ఆ క్రమయుగ్మము (a, b) ద్వారా సూచించబడుతుంది. అందులో a మొదటి మూలకంగా మరియు B రెండవ మూలకంగా ఉంటాయి.

ఉదాహరణ **1**: $(A+1,B-1) = (2,3)$ అయితే A మరియు B యొక్క విలువలను కనుగొనండి

సమాధానం: ఇవ్వబడిన సంబంధిత మూలకాలు సమానంగా ఉంటే ఆ క్రమయుగ్మాలు సమానంగా ఉంటాయని మనకు తెలుసు.

అందువల్ల, $(a + 1, b - 1) = (2,3)$ ఐతే

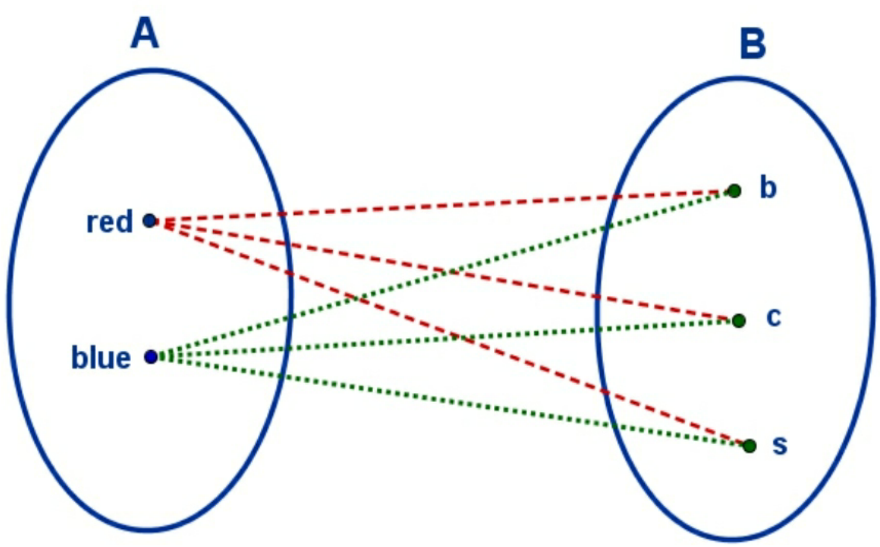
$\Rightarrow a + 1 = 2$ మరియు $b - 1 = 3$ అందువలన,

$\Rightarrow a = 2 - 1 \Rightarrow a = 1$ మరియు

$\Rightarrow b = 3 + 1 \Rightarrow b = 4$.

3. సమితుల యొక్క కార్టీసియన్ లబ్దము**:**

A అనే సమితి 2 రంగులను కలిగిన సమితి మరియు B అనే సమితి ఏవేని మూడు వస్తువులను కలిగిన సమితి అనుకుంటే, i.e. A = {ఎరుపు, నీలం} మరియు B = {b, c, s}, ఐతే ఇక్కడ b, c మరియు s ఒక నిర్దిష్ట బ్యాగ్, కోట్ మరియు చొక్కా సూచిస్తుంది ఈ రెండు సెట్ల నుండి ఎన్ని జతల రంగులు తయారు చేయబడతాయి? చాలా క్రమమైన పద్ధతిలో కొనసాగుతూ, క్రింద ఇచ్చిన విధంగా 6 విభిన్న జతలు ఏర్పడతాయి:



(ఎరుపు,b), (ఎరుపు,c), (ఎరుపు,s), (నీలం,b), (నీలం, c), (నీలం,s).

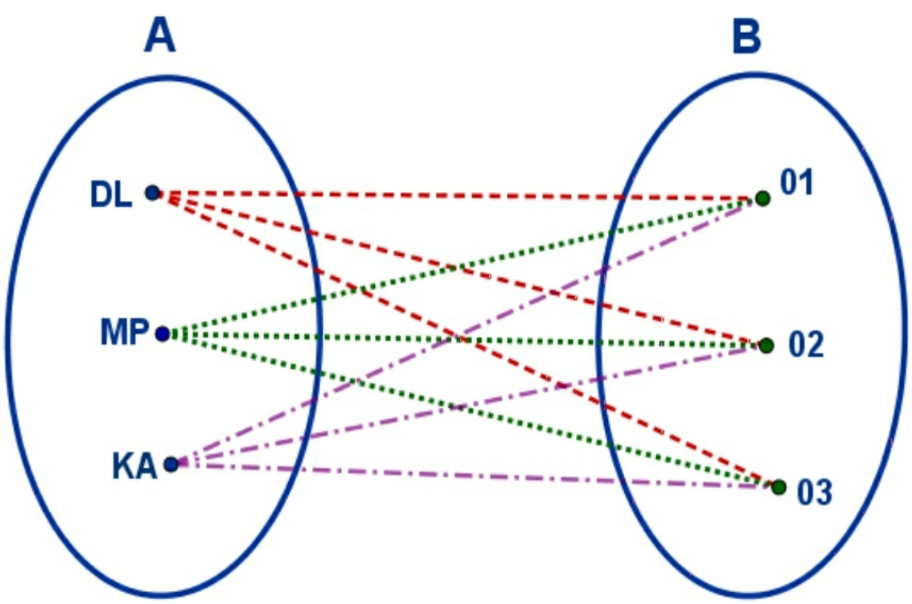
అందువలన, మనము 6 ప్రత్యేక వస్తువులను పొందుతాము.

ఇక్కడ సాధ్యమైన అన్ని క్రమయుగ్మాల సమితి, {(ఎరుపు,a), (ఎరుపు,b), (ఎరుపు,s), (నీలం,b), (నీలం,సి), (నీలం,s)}

క్రింద ఉన్న రెండు సమితుల యొక్క మరొక ఉదాహరణను పరిశీలిద్దాం:

A = {DL, MP, KA}, ఇక్కడ DL, MP, KA వరుసగా దిల్లీ, మధ్యప్రదేశ్ మరియు కర్ణాటకలను సూచిస్తాయి మరియు B = {01,02,03} DL, MP మరియు KA జారీ చేసిన వాహనాల లైసెన్స్ ప్లేట్ల యొక్క సంకేతాలను సూచిస్తాయి.

మళ్ళీ, దిల్లీ, మధ్యప్రదేశ్ మరియు కర్ణాటక అనే మూడు రాష్ట్రాలు వాహనాల లైసెన్స్ ప్లేట్ల కోసం సంకేతాలను తయారు చేస్తుంటే, కోడ్ A సెట్ నుండి ఒక మూలకంతో ప్రారంభమవుతుందనే పరిమితితో, అందుబాటులో ఉన్న జతలు ఈ క్రింది విధంగా;
(DL,01), (DL,02), (DL,03), (MP,01),(MP,02), (MP,03), (KA,01) (KA,02), (KA,03).
కింది రేఖాచిత్రంలో చిత్రీకరించినట్లు ఉంటాయి;



ఈ రకమైన అన్ని జతలను కలిగివుండే సమితి ఏమిటంటే;
{(DL,01), (DL,02), (DL,03), (MP,01),(MP,02), (MP,03), (KA,01), (KA,02), (KA,03)}
రెండు సమితుల నుండి ఆర్డర్ చేయబడిన ఈ జతల యొక్క సమితిని ఆ రెండు A మరియు B సమితిల కార్టేసియన్ లబ్ధం అంటారు.
కావున, A మరియు B రెండు సమితిల కార్టేసియన్ లబ్ధం;
{(DL,01), (DL,02), (DL,03), (MP,01),(MP,02), (MP,03), (KA,01), (KA,02), (KA,03)}.

(i) నిర్వచనం**:**

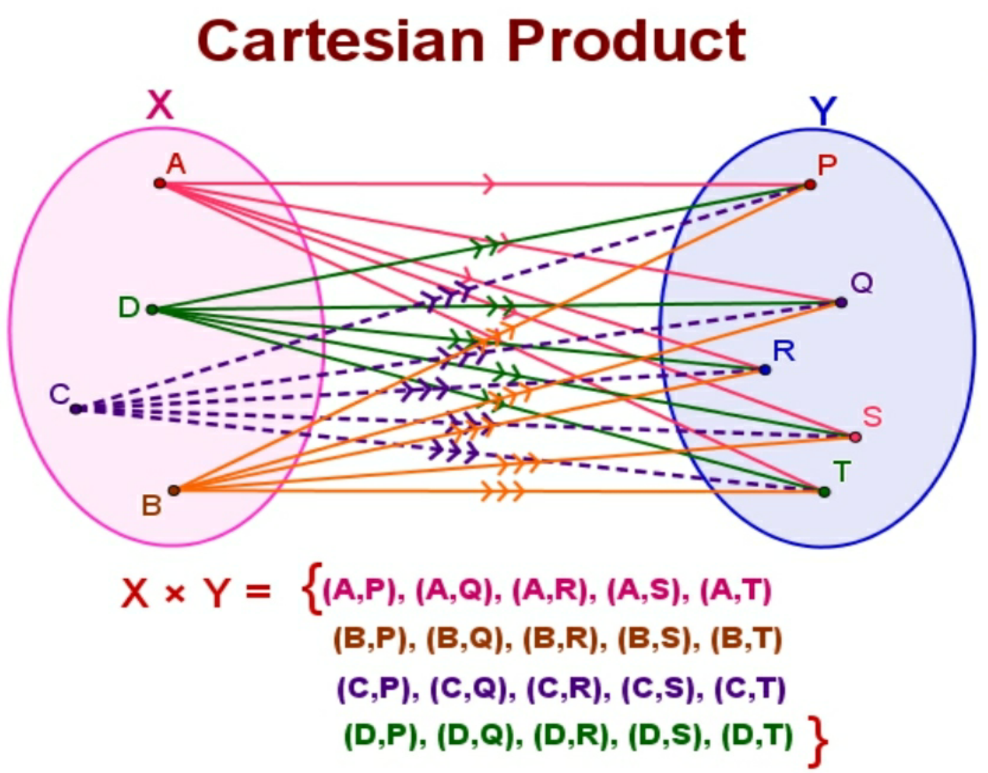
P మరియు Q అనేవి రెండు శూన్య సమితులు కాని ఏవైనా రెండు సమితులుగా ఇవ్వబడ్డాయి. P మరియు Q సమితుల యొక్క కార్టీసియన్ లబ్దము $P \times Q$, ఇది $p \in P$, $q \in Q$ కలిగినటువంటి అన్ని క్రమాయుగ్మాల (p, q) సమితి సూచించబడుతుంది.

కావున, $P \times Q = \{(p, q): p \in P, q \in Q\}$.

కార్టేసియన్ లబ్దము క్రమాయుగ్మాల సమితి కనుక $P \times Q$ మరియు $Q \times P$లు, $P = Q$ ఐతే తప్ప, రెండు
వేర్వేరు సమితులుగా ఉంటాయి.

క్రింది పటము X మరియు Y అను రెండు సమితుల మధ్య కార్టీసియన్ లబ్దమును వివరిస్తుంది,ఇక్కడ,

$X = \{A, B, C, D\}$ మరియు $Y = \{P, Q, R, S, T\}$.



Observe in figure $n(X \times Y) = n(X) \times n(Y) = 20$.

పై పటము లో $n(X \times Y) = n(X) \times n(Y) = 20$ గా ఉండటాన్ని గమనించండి.

వ్యాఖ్యలు:

(i) $A \times B$ మరియు $B \times A$ లు $A \neq B$ వలే రెండు వేర్వేరు సమితులు గా ఉంటాయి.

(ii) $A \times B$ సమితిలోని మూలకాల సంఖ్యను మీరు గమనించారా? ఇది 9. ఎందుకంటే A మరియు B రెండు సమితులలో చెరో 3 మూలకాలు ఉన్నాయి.

(iii) ఈ మూలకాలు జత చేయబడిన క్రమాన్ని కూడా గమనించండి,కోడ్ (DL, 01), కోడ్ (01, DL) కి భిన్నంగా ఉంటుంది.

(iv) A సమితిలో p మూలకాలు మరియు B సమితిలో q మూలకాలు ఉంటే, $A \times B$ సమితిలో pq మూలకాలు ఉంటాయి.

అనగా $n(A) = p$ మరియు $n(B) = q$ అయితే, $n(A \times B) = pq$ అవుతుంది.

(v)ఇచ్చిన రెండు సమితులలో సంబంధిత మొదటి మూలకాలు సమానంగా ఉండి మరియు సంబంధిత రెండవ మూలకాలు కూడా సమానంగా వుంటే ఆ రెండు క్రమయుగ్మాలు సమానంగా ఉంటాయి.

(vi) A మరియు Bలు ఏవేని రెండు శూన్యం కాని సమితులు అయితే మరియు A లేదా B లలో ఏదోఒకటి ఒక అనంతమైన సమితి అయినట్లయితే, $A \times B$ కూడా ఒక అనంతమైన సమితి అవుతుంది.

(vii) P లేదా Q గాని ఒక శూన్య సమితి అయితే, అనగా $P = \phi$ లేదా $Q = \phi$, అయినప్పుడు $P \times Q = \phi$ అవుతుంది.

(viii) మరియు P మరియు Q రెండూ శూన్య సమితులు కాకపోతే, అనగా $P \neq \phi$ మరియు $Q \neq \phi$,, అప్పుడు

$P \times Q \neq \phi$ అవుతుంది.

(ii) సమితుల కార్టీసియన్ లబ్ధాలను గ్రాఫ్ చిత్రాల ద్వారా ప్రాతినిధ్యపరచడం**;**

ఇప్పుడు మనము (p, q) క్రమాయుగ్మాన్ని గ్రాఫికల్గా సూచిద్దాం, అయితే ఇక్కడ $p \in P$, $q \in Q$,

P మరియు Q వాస్తవ సంఖ్యల యొక్క ఏవైని రెండు అశూన్య సముతులు అనుకుందాం.

మనము x = p మరియు y = q అను రెండు రేఖలను గీస్తాము మరియు x = p మరియు y = q వద్ద లంబ రేఖల ఖండన బిందుమను కనుగొంటాము.

X = p మరియు y = q రేఖల ఖండన బిందుమ (p, q) క్రమయుగ్మముగా సూచించబడుతుంది.

ఉదాహరణ **2**:

$P = \{3,4,5\}$ మరియు $Q =\{1,2,3\}$ అనుకుందాం. అయితే ఈ క్రింది వానిని కనుగొనండి.

(i) $P \times Q$ and $Q \times P$

(ii) Is $P \times Q = Q \times P$?

(iii) Is $n(P \times Q) = n(Q \times P)$?

సమాధానం**:**

దత్తాంశం: $P = \{3,4,5\}$ మరియు $Q =\{1,2,3\}$

(i) $P \times Q = \{(3,1),(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2),(5,3)\}$. మరియు

$Q \times P = \{(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,3),(3,4),(3,5)\}$.

(ii) $P \times Q$ మరియు $Q \times P$ లు ఖశ్చితంగా ఒకే రకమైన క్రమాయుగ్మాలను కలిగివుండవని మనం గమనించవచ్చు.

కావునా $P \times Q \neq Q \times P$.

(iii) $P \times Q$ మరియు $Q \times P$ లు సమానసంఖ్యలో క్రమాయుగ్మాలను కలిగివుంటాయని మనం గమనించవచ్చు.
కావున $n(P \times Q) = n(Q \times P)$
ఎందుకంటే,
$n(P \times Q) = n(P) \times n(Q) = n(Q) \times n(P) = n(Q \times P) = 3 \times 3 = 9$ అవుతుంది కాబట్టి.
ఉదాహరణ **3**:
ఒకవేళ $A \times B = \{(3,p),(4,q), (5,r),(6,s)\}$ అయితే
అప్పుడు A సమితిని మరియు B. సమితిని నిర్ధారించండి.

సమాధానం:

దత్తాంశం: $A \times B = \{(3,p),(4,q), (5,r),(6,s)\}$.
అయితే,
మొదటి మూలకాల సమితి $\{3,4,5,6\}$ మరియు
రెండవ మూలకాల సమితి $\{p,q,r,s\}$
తద్వారా
$A = \{3,4,5,6\}$ మరియు $B =\{p,q,r,s\}$.

ఉదాహరణ **4:**
$A \times B = \{(p, q), (p, r), (m, q) (m, r)$ If అయితే, A మరియు B ని కనుగొనండి.

సమాధానం:

ఇచ్చిన నిర్వచనం ప్రకారం,
$A \times B$ అనేది A మరియు Bఅనే రెండు సముతుల కార్టెసియన్ లబ్దము అది A మరియు B అనే రెండు సమితుల యొక్క మూలకాలను కలిగిన అన్ని క్రమయుగ్మాల సమితి. అనగా
$A \times B = \{(x, y): x \in A, y \in B\}$, అందువలన
$A = A \times B = \{p, m \}$ యొక్క క్రమాయుగ్మాల లోని అన్ని మొదటి మూలకాల సమితి.
$B = A \times B = \{q, r\}$ యొక్క క్రమాయుగ్మాల లోని అన్ని రెండవ మూలకాల సమితి.

(III) మూడు సమితుల కార్టీసియన్ లబ్దము మరియు వాటి క్రమ త్రికాలు లేదా త్రిపాది**:**
A, B మరియు C, ఏవైనా మూడు సమితులు అనుకుంటే అప్పుడు వాటి అన్ని క్రమ త్రిపాదిల/త్రికాల సమితి (A, B, C); ఇక్కడ $a \in A$, $b \in B$ మరియు $c \in C$ అయితే ఆ ప్రత్యేక క్రమాన్ని A,B,C మూడు సమితుల కార్టీసియన్ లబ్దము అంటారు మరియు దానిని $A \times B \times C$ గా రాస్తాము. సాంకేతికంగా దానిని మనము
$A \times B \times C = \{(a, b, c): a \in A, b \in B$ మరియు $c \in C\}$ గా వ్రాస్తాము.

ఉదాహరణ **5:**

A= {−-2,1} అయితే A×A×A ను కనుగొనండి.

సమాధానం:

$A\times A = \{-2,1\} \text{ x } \{-2,1\}$

$= \{(-2,-2),(-2,1),(1,-2),(1,1)\}.$

$A\times A\times A = \{(-2,-2),(-2,1),(1,-2),(1,1)\} \times \{-2,1\}$

$= \{(-2,-2,-2), (-2,1,-2),(1,-2,-2),(1,1,-2), (-2,-2,1),(-2,1,1),(1,-2,1),(1,1,1)\}.$

n సమితుల యొక్క కార్టీసియన్ లబ్దాల యొక్క క్రమ **n-**నిరూపకాలు**:**

సాధారణంగా, A_1, A_2, ……….. A_n అనేవి ఏవేని n సమితులు అయితే, వాటి మూలకాల యొక్క క్రమ n-నిరూపకాలు ఏమనగా, $(a_1, a_2 \ldots a_n)$; $a_1\in A_1$, $a_2\in A_2$,... $a_n\in A_n$

అలాంటి అన్ని క్రమ n- నిరూపకాల $(a_1, a_2 \ldots a_n)$; $a_1\in A_1$, $a_2\in A_2$,... $a_n\in A_n$ సమితిని n సమితుల యొక్క అనగా A_1, A_2, ……….. A_n యొక్క కార్టాసియన్ లబ్దము అని పిలుస్తారు మరియు దీనిని సాంకేతికంగా $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1 , a_2 \ldots a_n); a_i\in A_i, 1\le i \le n\}$ అని రాస్తారు.

ఇది $\prod_{i=1}^{n} A_i$ చేత ప్రాతినిధ్య పరుస్తారు, ఇక్కడ $\prod$ అనేది లబ్దాన్ని సూచిస్తుంది.

అది సాంకేతిక రూపంలో,

$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2 \ldots a_n);\ a_i\in A_i, 1\le i \le n\}.$

సిద్ధాంతం:

P మరియు Q ఏవైనా రెండు అశూన్య సమితులు అయితే,

P × Q = Q × P అయినట్లయితే P = Q అవుతుంది అని నిరూపించండి .

నిరూపణ:

మనము P × Q = Q × P అవుతుంది అనుకుందాం.అప్పుడు, మనము P = Q అని నిరూపించాలి.

x అనేది P అను సమితికి చెందిన ఏదైనా మూలకం అనుకుందాము.

అప్పుడు, $x\in P$ అనునది ఒకవేళ $(x, a) \in P \times Q$ అయినప్పుడు, $a\in Q$ అవుతుంది,

మనము P × Q = Q × P అని ఊహించినందున, $\Rightarrow (x,a) \in P\times Q\Rightarrow(x,a) \in Q\times P\Rightarrow x\in Q$

అందువల్ల, $x\in P\Rightarrow x\in Q$

$\Rightarrow$P అనేది Q యొక్క ఉపసమితి.

అదేవిధంగా y ను Q అను సమితికి చెందిన ఏదైనా మూలకం అని తీసుకుంటే, మనము దానినుండి Q అనేది P యొక్క ఉపసమితి అని చూపించగలము.

కావునా, పై రెండు సందర్భాల ద్వారా మనకు లభించే రెండింటిని కలిపితే, $P = Q$ అవుతుంది.

(ii)

ఇప్పుడు, $P = Q$ అనితీసుకుందాం .

అప్పుడు, మనము $P \times Q = Q \times P$ అని నిరూపించాలి

ఇప్పుడు, $P = Q \Rightarrow P \times Q = P \times P$.

మరియు $Q \times P = P \times P$ ($P = Q$ గా)

మనకు లభించే పై రెండింటిని కలిపితే,

$P \times Q = Q \times P$ అవుతుంది.

అందువల్ల P మరియు Q ఏదైనా రెండు అశూన్య సమితులు అయి

$P \times Q = Q \times P$ అయినట్లయితే $P = Q$ అవుతుంది.

ఉదాహరణ **6:**

P అనేది ఒక అశూన్య సమితి అయి

$P \times Q = P \times R$ అని తెలిపే విధంగా ఉంటే, అప్పుడు $Q = R$ అని నిరూపించండి.

సమాధానం:

q అనేది Q యొక్క ఏదైనా ఒక మూలకంగా అనుకుందాం. అప్పుడు

అన్ని $(p,q) \in P\times Q \Rightarrow (p,q) \in P\times R$, $p\in P$ (ఎందుకంటే $P\times Q = P \times R$)

$\Rightarrow q \in R$

కావున, $q \in Q \Rightarrow q\in R$.

కాబట్టి, Q అనునది R యొక్క ఉపసమితి అవుతుంది…………………,................(I).

ఇప్పుడు,

r అనేది R అను సమితిలోని ఏదైనా ఒక మూలకంగా తీసుకుందాం.

అప్పుడు,

$(p,r) \in P\times R \Rightarrow (p, r) \in P\times Q$, for all $p \in P$ (as $P\times Q = P \times R$)

$\Rightarrow r\in Q$

కావునా, $r \in R \Rightarrow r\in Q$ అవుతుంది.

అందువలన, R అనేది Q కి ఉప సమితి అవుతుంది………………………………….(II).

(I) మరియు (II)నుండి….మనకు

$Q=R$ వస్తుంది.

ఉదాహరణ **7:**

R అన్ని వాస్తవ సంఖ్యల సమితి అయితే,

$R \times R$ మరియు $R \times R \times R$ అను కార్టెసియన్ లబ్దాలు ఏమి తెలియ చేస్తాయి?

సమాధానం:

$R \times R$ కార్టేసియన్ లబ్దము,
$R \times R = \{(x, y): x, y \in R\}$ సమితిని సూచిస్తుంది,
ఇది ద్వితీయ తలములోని అన్ని బిందువుల నిరూపకాలను సూచిస్తుంది.
మరియు కార్టెసియన్ లబ్దము $R \times R \times R$,
$R \times R \times R = \{(x, y, z): x, y, z \in R\}$ అను సమితిని సూచిస్తుంది.
ఇది త్రిమితీయ తలములోని అన్ని బిందువుల నిరూపకాలను సూచిస్తుంది.

4. సారాంశం**:**

1) ఒక జత మూలకాలు ఒక నిర్దిష్ట క్రమంలో ఒకదానితో ఒకటి సమూహం చేయబడిన అవి క్రమ యుగ్మముగా నిర్వచించబడతాయి.
2) A మరియు B అను రెండు సమితుల కార్టెసియన్ లబ్దము
$A \times B = \{(a, b): a \in A, b \in B\}$ గా ఇవ్వబడుతుంది
3) ముఖ్యంగా $R \times R = \{(x, y): x, y \in R\}$ మరియు
$R \times R \times R = \{(x, y, z): x, y, z \in R\}$
4) $(a, b) = (x, y)$ అయితే, $a = x$ మరియు $b = y$.
5) $n(A) = p$ మరియు $n(B) = q$ అయితే, $n(A \times B) = pq$.
6) A ఏదైనా ఒక సమితి అయితే,
$A \times \varphi = \varphi$
7) సాధారణంగా, $A \times B \neq B \times A$ అవుతుంది.