1. ಘಟಕ(ಮಾಡ್ಯೂಲ್)ದ ವಿವರಣೆ ಮತ್ತು ರಚನಾ ವಿನ್ಯಾಸ

ಘಟಕದ ವಿವರಣೆ	
ವಿಷಯ	ಗಣಿತಾಶಾಸ್ತ್ರ
ಕೋರ್ಸ್ ಹೆಸರು	ಗಣಿತ ೦೧ (ತರಗತಿ, ಸೆಮಿಸ್ಟರ್-೧)
ಘಟಕದ ಹೆಸರು	ಸಂಬಂಧ ಮತ್ತು ಉತ್ಪನ್ನ - ಭಾಗ 1
ಘಟಕದ ಐ.ಡಿ	kemh_10201
ಪೂರ್ವ-ಅವಶ್ಯಕತೆಗಳು	ಗಣ ಮತ್ತು ಅದರ ಲಕ್ಷಣಗಳು.
ಉದ್ದೇಶಗಳು	ಈ ಅಧ್ಯಾಯವನ್ನು ಕಲಿತ ನಂತರ , ಅಭ್ಯಸಿಸುವವರು, ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಕಲಿಯುವಂತವರಾಗುತ್ತಾರೆ. ● ಕ್ರಮಯುಗ್ಮಗಳು. ● ಕಾರ್ಟಿಸಿಯನ್ ಗುಣಲಬ್ಧ.
ಪ್ರಮುಖ ಪದಗಳು	ಕಾರ್ಟಿಸಿಯನ್ ಗುಣಲಬ್ಧ

2. ಸಂರಚನಾ ತಂಡ:

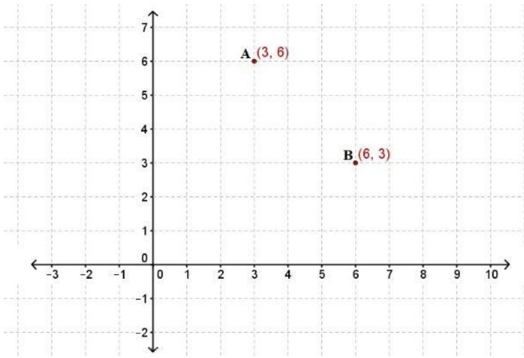
ಪದನಾಮ	ಹೆಸರು	ಅಂಗಸಂಸ್ಥೆ
ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ MOOC ಸಮನ್ವಯಾಧಿಕಾರಿ(NMC)	ಪ್ರೊ. ಅಮರೇಂದ್ರ. ಪಿ. ಬೆಹೇರಾ	CIET, NCERT, ನವದೆಹಲಿ
ಕಾರ್ಯಕ್ರಮ ಸಮನ್ವಯಾಧಿಕಾರಿ	ಡಾ. ಮಹಮ್ಮದ್ ಮಾಮೂರ್ ಅಲಿ	CIET, NCERT, ನವದೆಹಲಿ
ಕೋರ್ಸ್ ಸಮನ್ವಯಾಧಿಕಾರಿ(CC)/PI	ಡಾ. ತಿಲ್ ಪ್ರಸಾದ್ ಶರ್ಮ	DESM, NCERT ದೆಹಲಿ
ಕೋರ್ಸ್ ಉಪ ಸಮನ್ವಯಾಧಿಕಾರಿ(Co-PI)	ಡಾ. ಮಹಮ್ಮದ್ ಮಾಮೂರ್ ಅಲಿ	CIET, NCERT, ನವದೆಹಲಿ
ವಿಷಯ ಪರಿಣತರು (SME)	ಕುಮಾರಿ. ಅಂಜಲಿ ಚುಗಾನಿ	ಸಂಸ್ಕೃತ ಶಾಲೆ. ಹೊಸದೆಹಲಿ
ಪರಿಶೀಲನಾ ತಂಡ	ಡಾ. ಸಾಧನ ಶ್ರೀವತ್ಸವ	ಕೆ. ವಿ. ಎಸ್, ಫರಿದಾಬಾದ್, ಹರಿಯಾಣ

ಪರಿವಿಡಿ

1. ಪೀಠಿಕೆ

ಕಾರ್ಟೀಸಿಯನ್ ಸಮತಲದಲದ ಮೇಲೆ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಲು ನಾವು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿದ್ದೇವೆ. ಕೆಳಗಿನ ಗ್ರಾಫ್ ನಲ್ಲಿ

(3, 6) ಮತ್ತು (6, 3) ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳೊಂದಿಗೆ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ಕೆಳಗಿನ ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಿದ A ಮತ್ತು B ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು ಎಂದು ನಿಮಗೆ ಚೆನ್ನಾಗಿ ತಿಳಿದಿದೆ.



ಈ ಎರಡು ಜೋಡಿಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಕ್ರಮವು ಬಹಳ ಮುಖ್ಯ ಎಂಬುದನ್ನು ಇದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿದ್ದರೂ, ಕ್ರಮವನ್ನು ಬದಲಿಸುವ ಮೂಲಕ ಕಾರ್ಟೀಸಿಯನ್ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ಬಿಂದು ಗಳನ್ನು ನಾವು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಜೋಡಿಯಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಯಾವ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದು ಮುಖ್ಯ. ಅಂತಹ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ಕ್ರಮಯುಗ್ಮ (ಜೋಡಿ)ಗಳೆಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

2. ಕ್ರಮಯುಗ್ಮ

ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಜೋಡಿಯು ಕ್ರಮಯುಗ್ಮವಾಗುತ್ತದೆ.

ಎರಡು ಕ್ರಮಬದ್ಧ ವಾದ ಗಣಾಂಶ ಜೋಡಿಗಳು (a, b) ಮತ್ತು

(u, v) ಸಮವಾಗಿ ಆಗುವುದು ಮತ್ತು ಆಗಬೇಕಿದ್ದರೆ a=u ಮತ್ತು b = v ಆಗಲೇಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ p=q ಹೊರತು ಪಡಿಸಿದರೆ ಕ್ರಮಯುಗ್ಮ (p, q) ಯಾವಾಗಲೂ ಕ್ರಮಯುಗ್ಮ (q, p) ಗಿಂತ ಭಿನ್ನವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ ಒಂದು ಕ್ರಮಯುಗ್ಮವು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲಾದ ಗಣಾಂಶಗಳ ಜೋಡಿಯಾಗಿದೆ.ನಕ್ಷೆಯ ಪ್ರಕಾರ , ಕ್ರಮಯುಗ್ಮ (4, 5) ಎಂದರೆ ಅಬ್ಸಿಸ್ಸಾ x= 4 ಮತ್ತು ಆರ್ಡಿನೇಟ್ y= 5 ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು , ಕ್ರಮಯುಗ್ಮ (5,4)ಅಂದರೆ ಅಬ್ಸಿಸ್ಸಾ

x= 5 ಮತ್ತು ಆರ್ಡಿನೇಟ್ y= 4. ಆದ್ದರಿಂದ ಅವು ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತವೆ.

A ಮತ್ತು B ಎರಡು ಗಣಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, a∈ A ಮತ್ತು b∈ B ಗಣಾಂಶಗಳ ಜೋಡಿಯು (a, b) ಎಂಬ ಕ್ರಮಯುಗ್ಮವಾಗಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತವೆ .ಅದರಲ್ಲಿ a ಯು ಮೊದಲ ಗಣಾಂಶವಾಗಿ ಮತ್ತು b ಯು ಎರಡನೆಯ ಗಣಾಂಶವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ **1**: (a+1, b-1) = (2,3) ಆದರೆ

a ಮತ್ತು b ನ ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಕ್ರಮಯುಗ್ಮಗಳಲ್ಲಿ ಅವುಗಳಗೆ ಅನುಗುಣವಾದ ಗಣಾಂಶಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ ಸಮಾನವಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, (a+1, b-1) = (2,3) ⇒a+1=2 ಮತ್ತು b-1 =3

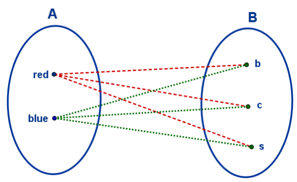
ಆದ್ದರಿಂದ, a= 2-1 ⇒a=1 ಮತ್ತು b=3+1 ⇒b =4

3. ಗಣಗಳ ಕಾರ್ಟಿಸಿಯನ್ ಗುಣಲಬ್ಧ

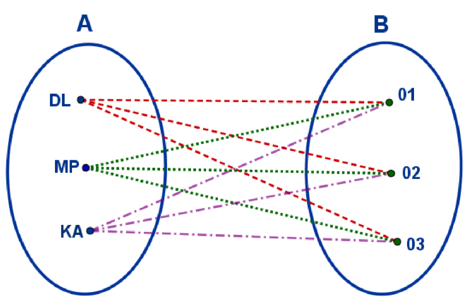
ಗಣ A ಯು 2 ಬಣ್ಣಗಳ ಒಂದು ಗಣ ವೆಂದು ಮತ್ತು ಗಣ Bಯು ಮೂರು ವಸ್ತುಗಳ ಒಂದು ಗಣವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಕೊಳ್ಳಿ.

A = {ಕೆಂಪು, ನೀಲಿ} ಮತ್ತು B = {b,c,s},

ಅಲ್ಲಿ b, c ಮತ್ತು s ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬ್ಯಾಗ್, ಕೋಟ್ ಮತ್ತು ಶರ್ಟ್ ಅನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ .ಈ ಎರಡು ಗಣ ಗಳಿಂದ ಎಷ್ಟು ಜೋಡಿ ಬಣ್ಣದ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಬಹುದು?
ಅತ್ಯಂತ ಕ್ರಮಬದ್ಧವಾಗಿ ಸಾಗಿದರೆ, 6 ವಿಭಿನ್ನ ಜೋಡಿಗಳು ಇರುವುದನ್ನು ನಾವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ನೋಡಬಹುದು.:



(ಕೆಂಪು, ಬಿ), (ಕೆಂಪು, ಸಿ),(ಕೆಂಪು, ಸ್), (ನೀಲಿ, b),
(ನೀಲಿ, ಸಿ),(ನೀಲಿ, s)
ಹೀಗೆ, ನಾವು 6 ವಿಭಿನ್ನ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.
ಎಲ್ಲಾ ಸಂಭವನೀಯ ಕ್ರಮಯುಗ್ಮ ಜೋಡಿಗಳ ಗಣ,
{(ಕೆಂಪು, b), (ಕೆಂಪು, c),(ಕೆಂಪು, s), (ನೀಲಿ, b),
(ನೀಲಿ, ಸಿ),(ನೀಲಿ, s)} ಆಗಿರುತ್ತದೆ.
ಈ ಕೆಳಗಿನ ಎರಡು ಗಣ ಗಳ ಇನ್ನೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ನೋಡೋಣ:
A={DL,MP,KA}, ಇಲ್ಲಿ DL, MP ಮತ್ತು KA ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ದೆಹಲಿ, ಮಧ್ಯಪ್ರದೇಶ ಮತ್ತು ಕರ್ನಾಟಕವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಮತ್ತು DL, MP ಮತ್ತು KA ನಿಂದ ವಿತರಿಸಲಾದ ವಾಹನಗಳ ಪರವಾನಗಿ ಫಲಕಗಳಿಗೆ ಸಂಕೇತಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಗಣ B = {01,02,03} ಆಗಿ ಹಾಗೂ ಮೂರು ರಾಜ್ಯಗಳಾದ ದೆಹಲಿ, ಮಧ್ಯಪ್ರದೇಶ ಮತ್ತು ಕರ್ನಾಟಕಗಳ ವಾಹನಗಳ ಪರವಾನಗಿ ಫಲಕಗಳಿಗೆ ಕೋಡ್ ಗಳನ್ನು A ಗಣದ ಗಣಾಂಶಗಳಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗುವ ನಿಭಂದನೆಯನ್ನು ಮಾಡಿಕೊಂಡು ತಯಾರು ಮಾಡಬೇಕಾಗಿದೆ ಅಂದುಕೊಂಡರೆ , ಆಗ ಲಭ್ಯವಿರುವ ಜೋಡಿಗಳು;
(DL,01), (DL,02), (DL,03), (MP,01),(MP,02), (MP,03), (KA,01) (KA,02), (KA,03).
ಇದನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ರೇಖಾಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಚಿತ್ರಿಸಲಾಗಿದೆ;



ಈ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಭವನೀಯ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಗಣವು {(DL,01), (DL,02), (DL,03), (MP,01), (MP,02), (MP,03), (KA,01), (KA,02), (KA,03)} ಆಗಿದೆ.
ಈ ಎರಡೂ ಗಣ ಗಳಿಂದ ಈ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಭವನೀಯ ಕ್ರಮಯುಗ್ಮ ಗಳ ಈ ಗಣವನ್ನು A ಮತ್ತು B ಗಳ ಕಾರ್ಟೀಸಿಯನ್ ಗುಣಲಬ್ಧ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.
ಆದ್ದರಿಂದ, A ಮತ್ತು B ಸೆಟ್ ಗಳ ಕಾರ್ಟೀಸಿಯನ್ ಗುಣಲಬ್ಧವು,
{(DL, 01), (DL, 02), (DL, 03), (MP, 01), (MP, 02), (MP, 03), (KA, 01), (KA, 02), (KA, 02), (KA, 03)} ಆಗಿರುತ್ತದೆ.
i)ವ್ಯಾಖ್ಯೆ:

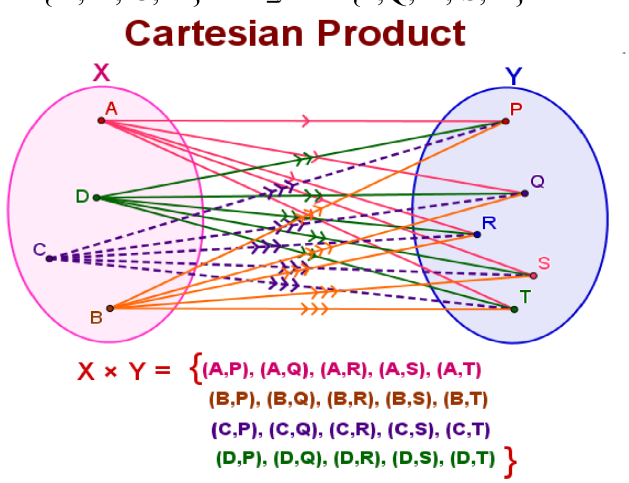
P ಮತ್ತು Q ಎಂಬ ಎರಡು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಗಣಗಳು. $P \times Q$ ನಿಂದ ಸೂಚಿಸಲ್ಪಡುವ ಗಣಗಳ ಕಾರ್ಟೀಸಿಯನ್ ಗುಣಲಬ್ಧವು $p \in P$, $q \in Q$ ಆಗಿ P ಮತ್ತು Q ಗಣಗಳಿಂದ ಕೂಡಿದ ಎಲ್ಲಾ ಕ್ರಮಯುಗ್ಮ ಜೋಡಿಗಳ (p, q) ಗಣ ಆಗಿದೆ.

$P \times Q = \{(p, q): p \in P,\ q \in Q\}$.

ಕಾರ್ಟೀಸಿಯನ್ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಕ್ರಮಯುಗ್ಮ ಗಣಗಳು ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $P = Q$ ಅಲ್ಲದೆ ಇರುವಾಗ $P \times Q$ ಮತ್ತು $Q \times P$ ಯು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಗಣಗಳಾಗುತ್ತವೆ.

ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರವು X ಮತ್ತು Y ಎರಡು ಗಣಗಳ ನಡುವಿನ ಕಾರ್ಟೀಸಿಯನ್ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

$X = \{A, B, C, D\}$ ಮತ್ತು $Y = \{P, Q, R, S, T\}$



ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $n(X \times Y) = n(X) \times n(Y) = 20$ ಆಗಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು.

ಟಿಪ್ಪಣಿಗಳು:

(i) $A \neq B$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $A \times B$ ಮತ್ತು $B \times A$ ಗಳು ವಿಭಿನ್ನ ಗಣ ಗಳಾಗಿವೆ .

(ii) $A \times B$ ಸೆಟ್ ನಲ್ಲಿರುವ ಗಣಾಂಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಾ? ಅದು 9 ಏಕೆಂದರೆ A ಮತ್ತು B ಗಣ ಗಳಲ್ಲಿ ತಲಾ 3 ಗಣಾಂಶಗಳಿವೆ.

(iii) ಈ ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಲಾಗಿರುವ ಕ್ರಮವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ, ಕೋಡ್ (DL, 01) ಸಂಕೇತಕ್ಕಿಂತ (01, DL) ಭಿನ್ನವಾಗಿದೆ.

(iv) ಗಣ A ನಲ್ಲಿ p ಗಣಾಂಶಗಳು, ಗಣ B ನಲ್ಲಿ q ಗಣಾಂಶಗಳಿದ್ದರೆ, ಆಗ $A \times B$ ನಲ್ಲಿ pq ಗಣಾಂಶಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ $n(A)=p$ ಮತ್ತು $n(B)=q$, ಆಗ $n(A \times B)=pq$.

(v) ಎರಡು ಕ್ರಮಯುಗ್ಮ ಸಮವಾಗಿ ಆದರೆ ಮತ್ತು ಆಗಬೇಕಿದ್ದರೆ, ಕ್ರಮವಾಗಿ ಮೊದಲನೆ ಗಣಾಂಶಗಳು ಸಮವಾಗಿರಬೇಕು ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ಗಣಾಂಶಗಳು ಸಹ ಸಮವಾಗಿರಬೇಕು.

(vi) A ಮತ್ತು B ಗಳು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಗಣಗಳಾಗಿದ್ದು ಮತ್ತು A ಅಥವಾ B ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಅಪರಿಮಿತ ಗಣವಾಗಿದ್ದರೆ, $A \times B$ ಯು ಕೂಡ ಅಪರಿಮಿತ ಗಣವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

(vii) ಒಂದು ವೇಳೆ P ಅಥವಾ Q ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಶೂನ್ಯಗಣಗವಾಗಿದ್ದರೆ ಅಂದರೆ , $P = \phi$ ಅಥವಾ $Q = \phi$, ಆಗ $P \times Q = \phi$

(viii)ಮತ್ತು P ಮತ್ತು Q ಎರಡೂ ಶೂನ್ಯ ಗಣಗಳಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಅಂದರೆ $P \neq \phi$ and $Q \neq \phi$, ಆಗ $P \times Q \neq \phi$.

(ii) ಗಣಗಳ ಕಾರ್ಟಿಸಿಯನ್ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವಿಕೆ:

$p \in P$, $q \in Q$, ಆಗಿ ನಾವು (p,q) ಕ್ರಮಯುಗ್ಮವನ್ನು ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸೋಣ,

P ಮತ್ತು Q ಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಎರಡು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಗಣ ಗಳಾಗಿವೆ. ನಾವು $x=p$ ಮತ್ತು $y=q$ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರಿಸಿ ಮತ್ತು $x=p$ ಮತ್ತು $y=q$ ನಲ್ಲಿ ಲಂಬರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ. $x=p$ ಮತ್ತು $y = q$ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಛೇದನ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕ್ರಮಯುಗ್ಮ (p,q) ನಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ **2:**

$P = \{3,4,5\}$ ಮತ್ತು $Q =\{1,2,3\}$ಆಗಿರಲಿ ಆಗ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $P\times Q$ and $Q \times P$

(ii) $P\times Q = Q \times P$ ಆಗುವದೆ?

(iii) $n(P\times Q) = n(Q \times P)$ ಆಗುವುದೆ?

ಪರಿಹಾರ **:**

ನಮಗೆ

$P = \{3,4,5\}$ ಮತ್ತು $Q = \{1,2,3\}$, ಇದೆ , ಆಗ

(i) $P\times Q = \{(3,1),(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2),(5,3)\}$

ಮತ್ತು $Q \times P = \{(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,3),(3,4),(3,5)\}$

(ii) $P\times Q$ ಮತ್ತು $Q \times P$ ಗಳು ನಿಖರವಾಗಿ ಒಂದೇ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿರುವ ಕ್ರಮಯುಗ್ಮಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲದಿರುವುದನ್ನು ನಾವು ನೋಡುತ್ತೇವೆ, ಆದುದರಿಂದ, $P\times Q \neq Q\times P$

(iii) $P\times Q$ ಮತ್ತು $Q \times P$ ಗಣಗಳು ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಕ್ರಮಯುಗ್ಮಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ ಎಂದು ನಾವು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ, ಆದ್ದರಿಂದ

$n(P\times Q) = n(Q \times P)$ ಯಾಕೆಂದರೆ,

$n(P\times Q) = n(P) \times n(Q) = n(Q)\times n(P)$

$\quad = n(Q \times P) = 3\times 3 = 9.$

ಉದಾಹರಣೆ **3:**

$A \times B = \{(3,p),(4,q), (5,r),(6,s)\}$ ಆದರೆ . ಗಣ A ಮತ್ತು B ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ?

ಪರಿಹಾರ:

$A \times B = \{(3,p),(4,q), (5,r),(6,s)\}$.

ಮೊದಲ ಗಣಾಂಶಗಳ ಗಣ $\{3,4,5,6\}$ ಮತ್ತು

ಎರಡನೇ ಗಣಾಂಶಗಳ ಗಣ $\{p,q,r,s\}$ ಆಗಿದೆ ,ಹಾಗಾಗಿ

$A = \{3,4,5,6\}$ ಮತ್ತು $B =\{p,q,r,s\}$

ಉದಾಹರಣೆ **4:**

$A \times B= \{(p,q), (p,r), (m,q) (m,r)\}$ ಆದರೆ, A ಮತ್ತು B ಯನ್ನು ಹುಡುಕಿ.

ಪರಿಹಾರ : ವ್ಯಾಖ್ಯಾನದ ಪ್ರಕಾರ,

ಎರಡು ಗಣಗಳ ಕಾರ್ಟೀಸಿಯನ್ ಗುಣಲಬ್ಧ $A \times B$ ವು A ಮತ್ತು B ಗಣಗಳಿಂದ ಆದ ಎಲ್ಲಾ ಕ್ರಮಯುಗ್ಮಗಳ ಗಣ ಆಗಿದೆ, ಹಾಗಾಗಿ

$A \times B= \{(x,y):x\in A, y\in B\}$, ಹೀಗೆ

$A = A \times B$ ಯ ಕ್ರಮಯುಗ್ಮಗಳ ಎಲ್ಲಾ ಮೊದಲ ಗಣಾಂಶಗಳ ಗಣ $= \{p,m\}$

$B= A \times B$ ಯ ಕ್ರಮಯುಗ್ಮಗಳ ಎಲ್ಲಾ ಎರಡನೇ ಗಣಾಂಶಗಳ ಗಣ $= \{q,r\}$

A, B ಮತ್ತು C ಎಂಬ ಮೂರು ಗಣಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ, ಆಗ ಕ್ರಮವಾಗಿ $a\in A$, $b\in B$, ಮತ್ತು $c\in C$ ಬಂದ ಎಲ್ಲಾ ಕ್ರಮ ತ್ರಿವಳಿಗಳು (a,b,c)

ಗಣವನ್ನು A , B ಮತ್ತು C ಗಣಗಳ ಕಾರ್ಟೀಸಿಯನ್ ಗುಣಲಬ್ಧ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು $A\times B\times C$ ಯಿಂದ ಇದನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ . ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ ಇದನ್ನು ನಾವು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$A\times B\times C = \{(a, b, c) : a\in A, b\in B,$ ಮತ್ತು $c\in C\}$

ಉದಾಹರಣೆ**5:**

$A= \{-2,1\}$ ಆದರೆ, $A\times A\times A$ ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ:

$A\times A = \{-2,1\}\times x\{-2,1\}$

$= \{(-2,-2),(-2,1),(1,-2),(1,1)\}$

$A\times A\times A= \{(-2,-2),(-2,1),(1,-2),(1,1)\} \times\{-2,1\}$

$= \{(-2,-2,-2), (-2,1,-2),(1,-2,-2),(1,1,-2), (-2,-2,1),(-2,1,1),(1,-2,1),(1,1,1)\}$

ತ್ರಯಗಳು**:**

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ A1, A2, ……….. An ಗಳು n ಗಣಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಅದೇ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ $(a_1 , a_2$ ……….. an) $:a_1\in A_1, a_2\in A_2, an\in An$ ಅನ್ನು ಕ್ರಮ n ತ್ರಯಗಳೆಂದು ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

ಈ $(a_1 , a_2$ ……….. an) $:a_1\in A_1, a_2\in A_2, an\in An$

ಎಲ್ಲಾ ಕ್ರಮ n ತ್ರಯಗಳ ಗಣವನ್ನು A1 , A2 ……….. An ಗಣಗಳ n ಕಾರ್ಟಿಸಿಯನ್ ಗುಣಲಬ್ಧ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು A1 ×A2 ×………..×An ಎಂದು ಸಂಕೇತಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಇದನ್ನು $\prod_{i=1}^{n} A_i$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ , ಇಲ್ಲಿ Π ಯು ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ. ಸಂಕೇತಾಕ್ಷರದಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು A1 ×A2 ×………..×An

$= \{(a_1 , a_2$ ……….. an) $; ai\in Ai, 1\leq i \leq n\}$

ಸಿದ್ಧಾಂತ**:**

P ಮತ್ತು Q ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಗಣಗಳಾಗಿದ್ದರೆ , P×Q = Q× P ಆಗಿದ್ದು ಮತ್ತು ಆಗಬೇಕಿದ್ದರೆ P=Q ಸಾಬೀತುಪಡಿಸಿ.

ಪುರಾವೆ**:**

ಈಗ $P\times Q = Q\times P$ ಪರಿಗಣಿಸೋಣ, ನಂತರ ನಾವು P=Q ಎಂದು ರುಜುವಾತು ಮಾಡಬೇಕು.

x ಯು P ಗಣಕ್ಕೆ ಸೇರಿದ ಯಾವುದೇ ಗಣಾಂಶವೆಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ**.**

ಆಗ $x\in P$ ಆದಾಗ $(x,a) \in P\times Q$ ಆಗಿದ್ದರೆ $a \in Q$ ಆಗುತ್ತದೆ,

ಏಕೆಂದರೆ $P\times Q = Q\times P$ ಎಂದು ನಾವು ಪರಿಗಣಿಸಿದ್ದೇವೆ.

$\therefore(x,a) \in P\times Q \Longrightarrow(x,a) \in Q\times P\Longrightarrow x\in Q,$

ಹಾಗಾಗಿ $x\in P \Longrightarrow x\in Q$

$\Longrightarrow$"P ಎಂಬುದು ಸೆಟ್ Q ನ ಉಪಗಣ ಆಗಿದೆ.

ಅದೇ ರೀತಿ y ಅನ್ನು ಗಣ Q ಗೆ ಸೇರಿದ ಯಾವುದೇ ಗಣಾಂಶ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, Q ಎಂಬುದು P ಗಣದ ಉಪಗಣ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು.

ಎರಡನ್ನೂ ಸೇರಿಸಿದರೆ ನಮಗೆ P=Q ಎಂದು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

(*ii*)

ಈಗ , P=Q ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ,

ಆಗ $P\times Q = Q \times P$ ಎಂದು ನಾವು ತೋರಿಸಬೇಕು.

ಈಗ $P=Q \Longrightarrow P\times Q = P \times P$

ಮತ್ತು $Q \times P = P \times P$ (ಏಕೆಂದರೆ $P=Q$)
ಎರಡರ ಫಲಿತಾಂಶ ಸೇರಿಸಿದಾಗ ,
$P\times Q = Q \times P$ ಎಂದು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.
ಆದುದರಿಂದ P ಮತ್ತು Q ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಗಣಗಳಾಗಿದ್ದರೆ ,
$P\times Q = Q\times P$ ಆಗಿದ್ದು ಮತ್ತು ಆಗಬೇಕಿದ್ದರೆ $P=Q$ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.
ಉದಾಹರಣೆ **6:**
P ಯು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಗಣವಾಗಿದ್ದು $P\times Q = P \times R$ ಆದರೆ $Q= R$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
ಪರಿಹಾರ**:**
q ಯು Q ಗಣದ ಗಣಾಂಶವಾಗಿರಲಿ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ ಎಲ್ಲಾ $p \in P$ ಗೆ
$(p,q) \in P\times Q \Longrightarrow (p,q) \in P\times R$
(ಏಕೆಂದರೆ $P\times Q = P \times R$)
ಇದು $q \in R$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.
ಆದುದರಿಂದ $q \in Q \Rightarrow q\in R$
ಆದ್ದರಿಂದ , Q ಯು R ನ ಉಪಗಣವಾಗಿರುತ್ತದೆ……………(*i*)
ಈಗ, r ಯು R ಗಣದ ಗಣಾಂಶವಾಗಿದೆಯೆಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ.ಆಗ,
ಎಲ್ಲಾ $p \in P$ ಗೆ $(p,r) \in P\times R \Longrightarrow (p, r) \in P\times Q$ (ಏಕೆಂದರೆ $P\times Q = P \times R$)
$\Rightarrow r\in Q$
ಆದುದರಿಂದ, $r \in R \Rightarrow r\in Q$
ಆದ್ದರಿಂದ, R ಯು Q ಗಣದ ಉಪಗಣವಾಗಿದೆ ……(*ii*)
(*i*) ಮತ್ತು (*ii*) ರಿಂದ , $Q=R$ ಎಂದು ಸಿಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ **7:**
R ಎಂಬು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯಾಗಣವಾಗಿದ್ದರೆ , ಕಾರ್ಟಿಸಿಯನ್ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳಾದ $R\times R$ ಮತ್ತು $R\times R\times R$ ಗಳು ಏನನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತವೆ?
ಪರಿಹಾರ**:**
ಕಾರ್ಟಿಸಿಯನ್ ಗುಣಲಬ್ಧ $R\times R$, ಗಣ
$R\times R = \{(x,y):x,y\in R\}$ ನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ. ಇದು ಎರಡು ಆಯಾಮಗಳ ವ್ಯೋಮಗಳಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಕಾರ್ಟಿಸಿಯನ್ ಗುಣಲಬ್ಧ $R\times R\times R$ ಗಣ, $R\times R\times R=\{(x,y,z):x, y,z\in R\}$ ಇದು ಮೂರು
ಆಯಾಮಗಳ ವ್ಯೋಮಗಳಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.

4. Summary:

1) ಕ್ರಮಯುಗ್ಮ ಒಂದು ಜೊತೆ ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನು, ಒಂದು ವಿಶಿಷ್ಟ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಗುಂಪಾಗಿ ಜೋಡಿಸುವುದು.

2) ಕಾರ್ಟಿಸಿಯನ್ ಗುಣಲಬ್ಧ A ಮತ್ತು B ಗಣಗಳ $A \times B$ ಯು $A \times B = \{(a, b): a\in A, b\in B\}$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.
3) ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ $R \times R = \{(x, y): x, y\in R\}$ ಮತ್ತು

$R \times R \times R = (x, y, z): x, y, z\in R\}$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.
4) $(a, b) = (x, y)$ ಆದಾಗ, $a = x$ ಮತ್ತು $b = y$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ..

5) $n(\mathrm{A}) = p$ ಆದರೆ $n(\mathrm{B}) = q$ ಆದರೆ , $n(\mathrm{A} \times \mathrm{B}) = pq$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ..

6) ಯಾವುದೆ A ಗಣಕ್ಕೆ , $\mathrm{A} \times \varphi = \varphi$

7) ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ $\mathrm{A} \times \mathrm{B} \neq \mathrm{B} \times \mathrm{A}$