

1. ಘಟಕ(ಮಾಡ್ಯೂಲ್)ದ ವಿವರಣೆ ಮತ್ತು ರಚನಾ ವಿನ್ಯಾಸ

ಘಟಕದ ವಿವರಣೆ	
ವಿಷಯ	ಗಣಿತ
ಕೋರ್ಸ್ ಹೆಸರು	ಗಣಿತ -01(ತರಗತಿ XI, ಮೊದಲ ಸೆಮಿಸ್ಟರ್)
ಘಟಕದ ಹೆಸರು	ಉಪಗಣಗಳು ಮತ್ತು ಸೂಪರ್ ಗಣಗಳು ಭಾಗ -2
ಘಟಕದ ಐ.ಡಿ	kemh_10102
ಅಗತ್ಯ ತಯಾರಿ(ಪೂರ್ವಾಪೇಕ್ಷಿತ)	ಗಣಗಳ ಪರಿಕಲ್ಪನೆ ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಳ್ಳುವರು, ಗಣವನ್ನು ನಿಯಮ ವಿಧಾನ ಮತ್ತು ಪಟ್ಟಿ ವಿಧಾನಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವರು. ಗಣವನ್ನು ಪರಿಮಿತ, ಅಪರಿಮಿತ, ಶೂನ್ಯ ಮತ್ತು ಏಕಾಂಶಗಣಗಳನ್ನಾಗಿ ವರ್ಗೀಕರಿಸುವರು
ಉದ್ದೇಶಗಳು	<p>ಈ ಘಟಕವನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸಿದ ನಂತರ, ಕಲಿಕಾರ್ಥಿಯು</p> <ul style="list-style-type: none"> ನೀಡಲಾದ ಗಣದ ಉಪಗಣಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವರು. ಅನಾವೃತ ಮತ್ತು ಅವೃತ interval ಗಳನ್ನು ಉಪಗಣಗಳಾಗಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವರು. ಒಂದು ಗಣದ ಪವರ್ ಗಣವನ್ನು ಬರೆಯುವರು. ಒಂದು ಗಣಕ್ಕೆ ಬರೆಯಬಹುದಾದ ಉಪಗಣಗಳನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವರು ಗಣದಲ್ಲಿರುವ ಗಣಾಂಶಗಳ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಅದರ ಸಾಂಖ್ಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವರು
ಪ್ರಮುಖ ಪದಗಳು	ಉಪಗಣ, ಸೂಪರ್ ಗಣ, ಪವರ್ ಗಣ, interval ಗಣದ ಸಾಂಖ್ಯತೆ.

2. ಸಂರಚನಾ ತಂಡ:

ಪದನಾಮ	ಹೆಸರು	ಅಂಗಸಂಸ್ಥೆ
ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ MOOC ಸಮನ್ವಯಾಧಿಕಾರಿ(NMC)	ಪ್ರೊ. ಅಮರೇಂದ್ರ. ಪಿ. ಬೆಹೇರಾ	CIET, NCERT, ನವದೆಹಲಿ
ಕಾರ್ಯಕ್ರಮ ಸಮನ್ವಯಾಧಿಕಾರಿ	ಡಾ. ಮಹಮ್ಮದ್ ಮಾಮೂರ್ ಅಲಿ	CIET, NCERT, ನವದೆಹಲಿ
ಕೋರ್ಸ್ ಸಮನ್ವಯಾಧಿಕಾರಿ(CC)/PI	ಡಾ. ತಿಲ್ ಪ್ರಸಾದ್ ಶರ್ಮ	DESM, NCERT ದೆಹಲಿ
ಕೋರ್ಸ್ ಉಪ ಸಮನ್ವಯಾಧಿಕಾರಿ(Co-PI)	ಡಾ. ಮಹಮ್ಮದ್ ಮಾಮೂರ್ ಅಲಿ	CIET, NCERT, ನವದೆಹಲಿ
ವಿಷಯ ಪರಿಣತರು (SME)	ಡಾ. ಅಂಜಲಿ ಚುಗಾನಿ	ಸಂಸ್ಕೃತಿ ಶಾಲೆ, ನವದೆಹಲಿ
ಪರಿಶೀಲನಾ ತಂಡ	ಡಾ. ಸಾಧನಾ ಶ್ರೀವಾಸ್ತವ	KVS, ಫರೀದಾಬಾದ್, ಹರಿಯಾಣ

ಪರಿವಿಡಿ:

1. ಗಣದ ಉಪಗಣ

2. ಗಣದ ಸೂಪರ್ (super)ಗಣ
3. ಉಪಗಣಗಳಾಗಿ ಇಂಟರ್ವಲ್(interval)
4. ಪವರ್ ಗಣ(power set)
5. ಒಂದು ಗಣದಿಂದ ಸಾಧ್ಯವಾಗುವ ಉಪಗಣಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
6. ಗಣದ ಸಾಂಖ್ಯತೆ (cardinality)
7. ಸಾರಾಂಶ.

1. ಗಣದ ಉಪಗಣ:

ವಸ್ತುಗಳ ಗುಂಪುಗಳನ್ನು ಪುನರ್ ವಿಭಾಗ ಮಾಡಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಗೂಬೆ ಒಂದು ರೀತಿಯ ಹಕ್ಕಿ. ಹಾಗಾಗಿ ಪ್ರತೀ ಗೂಬೆಯು ಒಂದು ಹಕ್ಕಿ. ಇದನ್ನು ನಾವು ಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ಹೀಗೆ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತೇವೆ. “ ಗೂಬೆಗಳ ಗಣವು ಹಕ್ಕಿಗಳ ಗಣದ ಉಪಗಣವಾಗಿದೆ”.

S ಗಣದ ಪ್ರತೀ ಅಂಶವು T ಗಣಕ್ಕೆ ಸೇರಿದಾಗ S ಗಣವು T ಗಣದ ಉಪಗಣವಾಗಿ ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ.

$S \subset T$ (S ಗಣವು T ಗಣದ ಉಪಗಣವಾಗಿದೆ.)

ಇಲ್ಲಿ ನೀಡಲಾದ \subset ಚಿಹ್ನೆಯು ‘ಉಪಗಣವಾಗಿದೆ’ ಎಂಬುದರ ಸೂಚಕ.

{ಗೂಬೆ} \subset {ಹಕ್ಕಿಗಳು}

ಏಕೆಂದರೆ ಪ್ರತಿ ಗೂಬೆಯು ಹಕ್ಕಿಯಾಗಿದೆ.

ಹಾಗೆಯೇ $A = \{2,4,6\}$, $B = \{0,1,2,3,4,5,6\}$

ಆದ್ದರಿಂದ $A \subset B$ ಕಾರಣ A ಗಣದ ಪ್ರತೀ ಅಂಶವು B ಗಣಕ್ಕೆ ಸೇರಿದ್ದಾಗಿದೆ.

‘S’ ಗಣವು T ಗಣದ ಉಪಗಣವಲ್ಲ’ ಈ ವಾಕ್ಯವನ್ನು ಬರೆಯುವ ಕ್ರಮ

$S \not\subset T$

ಉದಾಹರಣೆ:

{ಹಕ್ಕಿಗಳು} $\not\subset$ {ಹಾರುವ ಜೀವಿ}

ಕಾರಣ, ಉಷ್ಣ ಪಕ್ಷಿಯು ಹಕ್ಕಿಯು ಹಕ್ಕಿಯಾದರೂ ಅದು ಹಾರುವುದಿಲ್ಲ.

ಹಾಗೆಯೇ $A = \{0,1,2,3,4\}$ $B = \{2,3,4,5,6\}$

$0 \notin B$ ಕಾರಣ $0 \subset A$ ಆದರೆ $0 \notin B$.

ಗಣ ಮತ್ತು ಶೂನ್ಯಗಣಗಳು ಅದರ ಉಪಗಣಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

S ಯಾವುದೇ ಗಣವಾದಾಗ, ಸ್ವಯಂ S ಅದರ ಉಪಗಣವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಕಾರಣ ‘S’ ಗಣದ ಪ್ರತೀ ಅಂಶ S ಗಣದ ಅಂಶವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾ: {ಹಕ್ಕಿಗಳು} \subset {ಹಕ್ಕಿಗಳು}

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ಮೇಲಾಗಿ, ϕ ಗಣವು ಪ್ರತಿ S ಗಣದ ಉಪಗಣವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

2) ಒಂದು ಗಣದ ಸೂಪರ್‌ಗಣ(super set): A ಮತ್ತು B ಗಳು ಎರಡು ಗಣಗಳಾಗಿವೆ, A ಗಣದ ಪ್ರತೀ ಗಣಾಂಶವೂ B ಗಣದ ಪ್ರತೀ ಗಣಾಂಶಕ್ಕೆ ಸಮನಾದಾಗ B ಗಣವನ್ನು A ಗಣದ ಸೂಪರ್‌ಗಣ ಎನ್ನುವರು.

$B \supseteq A$

3)ಸಮಗಣಗಳು: A ಮತ್ತು B ಗಳು ಎರಡು ಗಣಗಳಾದಾಗ, $A \subseteq B$ ಆದರೆ, 'A' ಯನ್ನು ನೈಜ ಉಪಗಣ (proper subset) ಎನ್ನುವರು. ಆದರೆ $B \not\subseteq A$. ಹಾಗಾಗಿ $A \neq B$. 'C' ಸಂಕೇತವು ನೈಜ ಉಪಗಣವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ $A \subset B$ ಎಂದು ಬರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಗಮನಿಸಿ: ಯಾವುದೇ ಗಣವು ಅದೇ ಗಣದ ನೈಜ ಉಪಗಣವಲ್ಲ. ಶೂನ್ಯಗಣವು ϕ ಎಲ್ಲಾ ಗಣದ ಉಪಗಣವಾಗಿದೆ.

ಉದಾ: $A = \{p, q, r\}$, $B = \{p, q, r, s, t\}$

A ಗಣದ ಗಣಾಂಶಗಳೆಲ್ಲವೂ B ಗಣದ ಗಣಾಂಶಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ 'A' ಯು 'B' ಯ ನೈಜ ಉಪಗಣವಾಗಿದೆ (proper subset) ಮತ್ತು $A \neq B$. ಕೆಲವು ಉಪಗಣಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನೂ ಈ

$$N \subset Z \subset Q, Q \subset R, T \subset R, N \not\subset I.$$

ರೀತಿಯಾಗಿ ಸ್ಪಷ್ಟ ಪಡಿಸಬಹುದು.

ಗಮನಿಸಿ: $A \subseteq B$ ಮತ್ತು $B \subseteq A$ ಆದಾಗ $A=B$ ಸಮಗಣಗಳಾಗುತ್ತವೆ.

ಉದಾ: $A = \{2, 4, 6, \dots\}$.

$B = \{x : x \text{ 8 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಿರುವ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ}\}$

ಇಲ್ಲಿ $A \subset B$ ಮತ್ತು $B \subset A$ ಆದ್ದರಿಂದ $A=B$.

4) ಉಪಗಣಗಳಾಗಿ intervals:

$a < b$ ಇರುವಂತೆ $a, b \in R$ ಆಗಿರಲಿ. ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ $\{y : a < y < b\}$ ಆವೃತವಲ್ಲದ interval ಆಗುವುದು. ಅದನ್ನು (a, b) ಎಂದು ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. a ಮತ್ತು b ಗಳ ನಡುವಿನ ಎಲ್ಲಾ ಗಣಾಂಶಕ್ಕೆ ಸೇರುವುದು ಆದರೆ 'a' ಮತ್ತು 'b' ಸೇರುವುದಿಲ್ಲ.

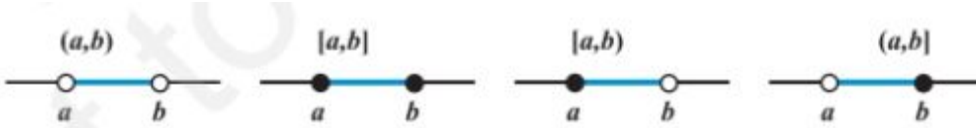
ಯಾವ interval (ಅಂತರ)ದಲ್ಲಿ ಅಂತ್ಯಬಿಂದುಗಳೂ ಸಹ ಒಳಗೊಂಡಿರುವುದೇ ಅದನ್ನು ಆವೃತ interval (ಅಂತರ) ಎನ್ನುವರು. (a, b)

ಒಂದು ಅಂತ್ಯ ಬಿಂದು ಆವೃತವಾಗಿ ಮತ್ತೊಂದು ಆವೃತವಾಗದಿರುವ ಸಂದರ್ಭಗಳೂ ಇವೆ.

$[a, b) = \{x : a \leq x < b\}$ a ಮತ್ತು b interval ದಲ್ಲಿ 'b' ಒಳಗೊಂಡಿದೆ.

$(a, b] = \{x : a < x \leq b\}$ a ಮತ್ತು b interval ದಲ್ಲಿ 'a' ಒಳಗೊಂಡಿದೆ.

ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯಾ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ, ಈಗಾಗಲೇ ವಿವರಿಸಲಾದ ವಿವಿಧ ಅಂತರಗಳನ್ನು ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಚಿತ್ರಿಸಬಹುದು.



$\{x : x \in R, -5 < x \leq 7\}$ ನಿಯಮ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲಾದ ಈ ಗಣವನ್ನು interval' ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ $(-5, 7]$ ಮತ್ತು $\{x : -3 \leq x < 5\}$ ಗಣವನ್ನು $[-3, 5)$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸಬಹುದು.

ಗಮನಿಸಿ: ಇಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಲಾದ ತುಂಬಿರದ ವೃತ್ತವು 'O' ಆ ಬಿಂದುವನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುವುದಿಲ್ಲ ಮತ್ತು ತುಂಬಿರುವ ವೃತ್ತವು '●' ಆ ಬಿಂದುವನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುತ್ತದೆ.

5) ಪವರ್ ಗಣ:

ವಸ್ತುಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥಿತ ಗುಂಪನ್ನು ನಾವು ಗಣ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದ್ದೇವೆ.
S – ಒಂದು ಗಣವಾದಾಗ ಆ ಗಣದ ಎಲ್ಲಾ ಉಪಗಣಗಳ ಗಣಕ್ಕೆ ಪವರ್ ಗಣ P(S) ಎನ್ನುವರು.
S={a,b} ಆದಾಗ,

$$P(S) = \{ \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \phi \}$$

ಯಾವುದೇ ಗಣಾಂಶಗಳಿರದ ಶೂನ್ಯಗಣವು ಪವರ್ ಗಣದ ಉಪ ಗಣವಾಗಿದೆ.

'S' ಗಣವು ಅದೇ ಗಣದ ಸ್ವಯಂ ಉಪಗಣವಾಗಿದ್ದು ಪವರ್ ಗಣದ ಉಪಗಣವಾಗಿದೆ.

6) ಒಂದು ಗಣದ ಉಪಗಣಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ:

ಒಂದು ಗಣದಲ್ಲಿ n ಗಣಾಂಶಗಳಿದ್ದರೆ, ಅದರ ಉಪಗಣಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 2^n .
ಉದಾಹರಣೆಗೆ:

A={1,3,5} ಗಣದ ಎಲ್ಲಾ ಉಪಗಣಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. ಉಪಗಣಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಯಾವುದೇ ಗಣಾಂಶವಿರದ ಶೂನ್ಯಗಣ, ϕ A ಗಣದ ಗಣಾಂಶವಾಗಿದೆ.

ಒಂದೊಂದು ಗಣಾಂಶವಿರುವ ಗಣಗಳು {1} {3} {5} A ಗಣದ ಉಪಗಣಗಳಾಗಿವೆ.

ಎರಡು ಗಣಾಂಶಗಳಿರುವ ಗಣಗಳು {1,3}, {1,5}, {3,5} A ಗಣದ ಉಪಗಣಗಳಾಗಿವೆ.

ಮೂರು ಗಣಾಂಶಗಳಿರುವ ಗಣ {1,3,5} A ಗಣದ ಉಪಗಣಗಳಾಗಿವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ A ಗಣದ ಉಪಗಣಗಳು $\{ \}, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1,3\}, \{1,5\}, \{3,5\}, \{1,3,5\}$

ಆದ್ದರಿಂದ 'A' ಗಣದಲ್ಲಿ ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಉಪಗಣಗಳು 8, ಎಂದರೆ 2^3 .

7) ಗಣಗಳ ಸಾಂಖ್ಯತೆ(cardinality):

ಗಣಗಳ ಸಾಂಖ್ಯತೆ ಎಂದರೆ ಗಣದಲ್ಲಿರುವ ಒಟ್ಟು ಗಣಾಂಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ.

'S' ಒಂದು ಪರಿಮಿತ ಗಣವಾದರೆ, $n(s)$ S ಗಣದ ಗಣಾಂಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ

ಉದಾಹರಣೆಗೆ: S= {1,3,5,7,9}, n(S)=5

A={1001,1002,.....3000} ಆದಾಗ, n(A)=2000

T={ ಇಂಗ್ಲೀಷ್ ಅಕ್ಷರಗಳು } ಆದಾಗ n(T)=26.

S = {5} ಗಣವು ಏಕಾಂಶ ಗಣ ಅಂದರೆ n(S)=1 ಆಗಿದೆ.

ಸಂಖ್ಯೆ 5 ಮತ್ತು ಗಣ S = {5} ಈ ಭೇದಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸುವುದು ಬಹುಮುಖ್ಯ

$5 \in S$ ಆದರೆ $\{5\} \notin S$

8. ಸಾರಾಂಶ:

- I. S ಗಣದ ಪ್ರತೀ ಅಂಶವು T ಗಣದ ಪ್ರತೀ ಅಂಶವಾದಾಗ S ಗಣವನ್ನು T ಗಣದ ಉಪಗಣವೆನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಇದನ್ನು $S \subseteq T$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.
- II. S ಗಣವು T ಗಣದ ಉಪಗಣವಾಗಿದ್ದರೆ, ಅದನ್ನು $S \subset T$ ಎಂದು ಬರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಅರ್ಥಾತ್, S ಗಣದ ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಅಂಶವು T ಗಣದ ಗಣಾಂಶವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ.

-
- III. A ಮತ್ತು B ಎರಡು ಗಣಗಳಾಗಿದ್ದು, A ಗಣದ ಪ್ರತೀ ಅಂಶವೂ B ಗಣದ ಪ್ರತೀ ಅಂಶವಾದಾಗ, B ಗಣವನ್ನು A ಗಣದ ಸೂಪರ್ (super) ಗಣವೆನ್ನುವರು. ಇದನ್ನು ಬರೆಯುವ ಕ್ರಮ : $B \supseteq A$
- IV. ಸ್ವಯಂ ಒಂದು ಗಣ ಮತ್ತು ಶೂನ್ಯಗಣ ಯಾವಾಗಲೂ ಉಪಗಣಗಳು.
- V. $A \subseteq B$ ಮತ್ತು $B \subseteq A$ ಆದಾಗ $A=B$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಅದನ್ನು ಸಮಗಣಗಳೆನ್ನುವರು.
- VI. ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ $\{y:a<y<b\}$ ಯನ್ನು ಅನಾವೃತ interval ಎನ್ನುವರು ಮತ್ತು ಅದನ್ನು (a,b) ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತಾರೆ.
- VII. ಎರಡು ಅಂತ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುವ interval ಅನ್ನು ಆವೃತ interval ಎನ್ನುವರು. ಅದನ್ನು $[a,b]$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತಾರೆ. ಹಾಗಾಗಿ, $[a,b) = \{x : a \leq x < b\}$.
- VIII. $[a,b) = \{x : a \leq x < b\}$ a ಯನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಹಾಗೂ b ಯನ್ನು ಒಳಗೊಳ್ಳದ ಅನಾವೃತ interval ಆಗಿದೆ.
- IX. $(a,b] = \{x : a < x \leq b\}$ b ಯನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಹಾಗೂ a ಯನ್ನು ಒಳಗೊಳ್ಳದ ಅನಾವೃತ interval ಆಗಿದೆ.
- X. S - ಒಂದು ಗಣವಾದಾಗ ಆ ಗಣದ ಎಲ್ಲಾ ಉಪಗಣಗಳ ಗಣಕ್ಕೆ ಪವರ್ ಗಣ ಎನ್ನುವರು. ಅದನ್ನು P(S) ಎಂದು ಸೂಚಿಸಲಾಗುವುದು.
- XI. ಒಂದು ಗಣದಲ್ಲಿ n ಗಣಾಂಶಗಳಿದ್ದರೆ, ಅದರ ಉಪಗಣಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 2^n .
- XII. ಗಣಗಳ, ಸಾಂಖ್ಯತೆ ಎಂದರೆ ಗಣದಲ್ಲಿರುವ ಒಟ್ಟು ಗಣಾಂಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ. 'S' ಒಂದು ಪರಿಮಿತ ಗಣವಾದರೆ, $n(s)$ S ಗಣದ ಗಣಾಂಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುತ್ತದೆ.